

Le Filtrage analogique

Sommaire :

1. Rôle	6
2. Différents types de filtres	6
2.1. Filtres à capacité commutée	7
2.2. Calculateur	8
3. Rappels sur la théorie du filtrage.....	8
3.1. Notion de fonction de transfert.....	8
3.2. Notion de fonction d'atténuation.....	8
3.3. Filtre réel – Gabarit	8
3.4. Notion de sélectivité et de bande relative.....	9
3.5. Notion de temps de propagation de groupe.....	10
3.6. Représentation en diagramme de Bode.....	10
3.6.1. Convention de la représentation	10
3.6.2. Graduation logarithmique de la fréquence	10
3.6.3. Représentation sur des échelles semi-log.....	10
3.6.4. Représentation sur des échelles semi-log.....	10
3.6.5. Caractéristique de l'argument	10
4. Filtre passif.....	11
4.1. Filtre passif pédagogique	11
4.1.1. Filtre passe bas	11
4.1.1.1. Constitution	11
4.1.1.2. Fonction de transfert.....	11
4.1.1.3. Forme générale	11
4.1.1.4. Représentation.....	11
4.1.1.5. Le module.....	11
4.1.1.6. L'argument	12
4.1.1.7. Tracés	12
4.1.1.8. Pulsation de coupure	13
4.1.2. Filtre passe bas du deuxième ordre RLC	14
4.1.2.1. Constitution	14
4.1.2.2. Fonction de transfert.....	14
4.1.2.3. Forme générale	14
4.1.2.4. Étude du polynôme du dénominateur.....	14
4.1.2.4.1. Factorisation	14
4.1.2.4.2. Intérêt de la factorisation.....	15
4.1.2.4.3. Surtension.....	17
4.1.3. Filtre passe bas du deuxième ordre par la mise en cascade de 2 premier ordre.....	19
4.1.3.1. Constitution	19
4.1.3.2. Fonction de transfert.....	19
4.1.3.3. Tracés	19
4.1.4. Filtre passe haut du premier ordre.....	20
4.1.4.1. Constitution	20
4.1.4.2. Fonction de transfert.....	20
4.1.4.3. Forme générale	21
4.1.4.4. Tracés	21

4.1.5. Filtre passe haut du deuxième ordre.....	22
4.1.5.1. Constitution	22
4.1.5.2. Fonction de transfert.....	22
4.1.5.3. Forme générale	22
4.1.5.4. Tracés	22
4.1.6. Filtre passe-bande.....	24
4.1.6.1. Constitution	24
4.1.6.2. Fonction de transfert, forme générale	25
4.1.6.3. Déterminations et caractérisations	25
4.1.6.3.1. Pulsations de coupure.....	25
4.1.6.3.2. Sélectivité du filtre	26
4.1.6.4. Passe bande RLC.....	26
4.1.6.5. Passe bande par association d'un passe haut et d'un passe bas	27
4.1.6.6. Pont de Wien	28
4.1.7. Filtre réjecteur de bande : le circuit bouchon.....	28
4.1.7.1. Constitution	28
4.1.7.2. Fonction de transfert.....	28
4.1.7.3. Forme générale	28
4.1.7.4. Tracés	28
4.1.8. Passe tout.....	30
4.1.8.1. Fonction.....	30
4.1.8.2. Montage.....	30
4.1.8.3. Fonction de transfert.....	30
4.1.8.4. Forme générale	31
4.1.8.5. Application: ligne à retard.....	31
4.1.9. Tableau des formes canoniques.....	32
4.2. Filtres passifs polynomiaux : synthèse de filtres.....	33
4.2.1. Description de la démarche	33
4.2.2. Normalisation.....	33
4.2.2.1. Normalisation en fréquence	33
Passe-bas normalisé.....	34
4.2.2.2. Normalisation des impédances.....	34
4.2.2.3. Application : normaliser ce filtre	34
4.2.2.4. Universalité du filtre passe bas.....	35
4.2.3. Fonctions de transfert de filtres analytiques.....	40
4.2.3.1. Détermination d'une fonction de transfert de Butterworth	41
4.2.3.2. Détermination d'une fonction de transfert de Chebycheff.....	43
4.2.3.3. Détermination d'une fonction de transfert de Bessel	46
4.2.3.4. Comparaison des réponses de plusieurs types de filtre	47
4.2.4. Déterminations des éléments du filtre passe-bas universel.....	48
4.2.4.1. Structure en T et matrice admittance.....	48
4.2.4.2. Utilisation	48
4.2.4.2.1. Filtres d'ordre pair.....	49
4.2.4.2.2. Filtres d'ordre impair	49
4.2.4.3. Récapitulatif	50
4.2.5. Dénormalisation	50
4.3. Filtres actif.....	51
4.3.1. Dénormalisation	51
4.3.2. Structure du premier ordre	52
4.3.2.1. Passe-bas inverseur	52
4.3.2.2. Passe-bas non inverseur	52
4.3.2.3. Passe-haut.....	52
4.3.3. Structure du deuxième ordre	53

4.3.3.1. Passe-bas	53
4.3.3.2. Passe-haut.....	53
4.3.3.3. Passe-bande	53
4.3.3.4. Réjecteur.....	54
4.3.3.5. Structure de Rauch	54
4.3.3.5.1. Structure passe-bas de Rauch.....	55
4.3.3.5.2. Structure passe-haut de Rauch	56
4.3.3.5.3. Structure passe-bande de Rauch.....	57
4.3.3.6. Structure de Sallen-key	58
4.3.3.6.1. Structure passe-bas de Sallen-key	59
4.3.3.6.2. Structure passe-haut de Sallen-key	60
4.3.3.6.3. Structure passe-bande de Sallen-key.....	61
5. Memo Butterworth - Tchebycheff - Bessel.....	62
Bibliographie	64

1. ROLE

Il n'est pas un système électronique qui ne fasse appel à, au moins, un filtre. La plupart en comporte en grande quantité.

Le filtrage est une forme de traitement de signal, obtenu en envoyant le signal à travers un ensemble de circuits électroniques, qui modifient son spectre de fréquence et/ou sa phase et donc sa forme temporelle.

Il peut s'agir soit :

- d'éliminer ou d'affaiblir des fréquences parasites indésirables
- d'isoler dans un signal complexe la ou les bandes de fréquences utiles.

Applications :

- ▶ systèmes de télécommunication (téléphone, télévision, radio, transmission de données...)
- ▶ systèmes d'acquisition et de traitement de signaux physiques (surveillance médicale, ensemble de mesure, radars...)
- ▶ alimentation électrique....

2.DIFFERENTS TYPES DE FILTRES

On classe les filtres en deux grandes familles : ANALOGIQUE et NUMERIQUE.

Les **filtres numériques** sont réalisés à partir de structure intégrée microprogrammable (DSP). Ils sont totalement intégrables, souples et performants.

Ils sont utilisés chaque fois que c'est possible. Ils sont pour l'instant limités à des fréquences pas trop élevées (< 100MHz).

On ne les utilisera pas si on doit limiter la consommation et ils nécessitent un pré-filtrage pour éviter le repliement spectral avant la numérisation du signal et un post-filtre de lissage.

Les **filtres analogiques** se divisent eux mêmes en plusieurs catégories :

- les filtres passifs qui font appels essentiellement à des inductances de haute qualité et des condensateurs. Jusque dans les années 70, c'était les seuls filtres conçus. Ils sont actuellement utilisés pour les hautes fréquences. (utilisation de quartz)
- les filtres actifs sont constitués de condensateurs, de résistances et d'éléments actifs qui sont essentiellement des AIL. Ils sont moins encombrants, faciles à concevoir et moins coûteux que les filtres passifs mais restent limités en fréquence (< 1MHz à cause de l'AIL). Ils consomment plus et nécessitent une source d'alimentation.

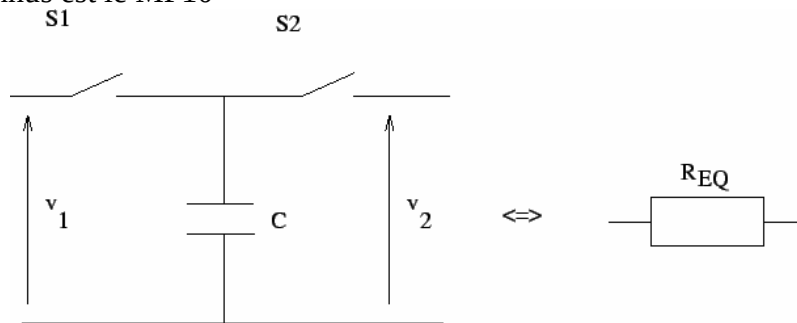
Remarque :

Depuis le début des années 80 sont apparus des filtres actifs à capacité commutée. Ils permettent de programmer la fréquence de coupure et d'être intégrable.

TYPE	COMPOSANTS	SPECIFITES
Filtre numérique	Circuits logiques intégrés	▶ Signaux numérisés ▶ $F < 100\text{MHz}$ ▶ convient en grande série ▶ entièrement programmable
Filtres passifs	Circuit discret L et C, Composants piézoélectriques (quartz)	▶ F élevée ▶ pas d'alimentation ▶ non intégrable
Filtres actifs	AIL, R et C	▶ $F < 1\text{ MHz}$ ▶ besoin d'alimentation ▶ tension filtrée faible $< 12\text{V}$
Filtres à capacité commutée	AIL, Interrupteur commandé MOS, R et C intégré	▶ $F < \text{qq MHz}$ ▶ besoin d'alimentation ▶ intégrable ▶ fréquence programmable

2.1.Filtres à capacité commutée

Un des plus connus est le MF10



Phase 1 : S1 fermé, S2 ouvert : $u_c = v_1$ et $Q_1 = C \cdot v_1$

Phase 2 : S1 ouvert, S2 fermé : $u_c = v_2$ et $Q_2 = C \cdot v_2$

Sur un cycle (une période de la fréquence de commutation des interrupteurs), il a circulé entre v_1 et v_2 $\Delta Q = Q_1 - Q_2$; or $i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$. $\Delta Q = C(v_1 - v_2)$ et $\Delta t = \frac{1}{f}$ on a alors $i = C(v_1 - v_2)f$

donc $v_1 - v_2 = i \cdot \frac{1}{Cf} = R_{eq} \cdot i$ avec $R_{eq} = \frac{1}{Cf}$. Si f varie, alors R_{eq} varie : cela va nous permettre de réaliser des filtres adaptatifs.

2.2.Calculateur

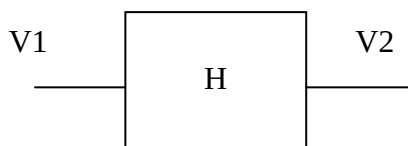
Le cœur du montage peut être composé d'un DSP, d'un microprocesseur ou d'une structure câblée (FPGA ou CPLD).

Contraintes :

- Respect du théorème de Shannon ($T_e = \frac{1}{f_e}$)
- Le temps de calcul T_c doit être plus petit que T_e . Plus T_c se rapproche de T_e , plus on déphase la sortie vis-à-vis du signal d'entrée.

3.RAPPELS SUR LA THEORIE DU FILTRAGE

3.1.Notion de fonction de transfert



Le comportement d'un filtre est défini par l'étude fréquentielle de la fonction de transfert entre la tension de sortie et la tension d'entrée du filtre

$$H(j\omega) = \frac{V2}{V1}$$

$$H_{dB} = 20 \bullet \log \left| \frac{V2}{V1} \right| \quad \varphi = \text{Argument}[H(j\omega)]$$

3.2.Notion de fonction d'atténuation

Parfois, on préfère définir un filtre par rapport à l'atténuation qu'il amène sur la grandeur d'entrée :

$$A(j\omega) = \frac{1}{H(j\omega)} = \frac{V1}{V2}$$

3.3.Filtre réel – Gabarit

Un filtre idéal présente :

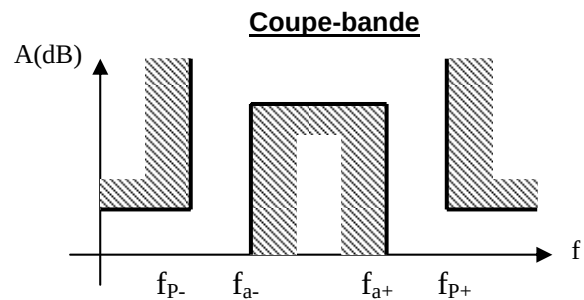
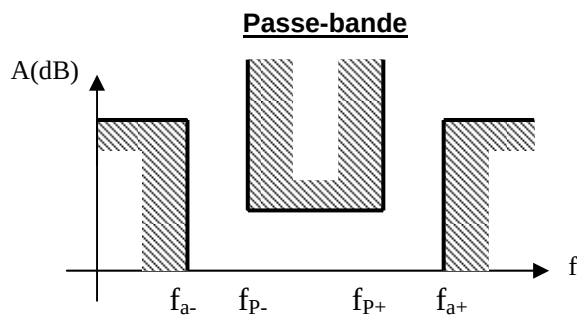
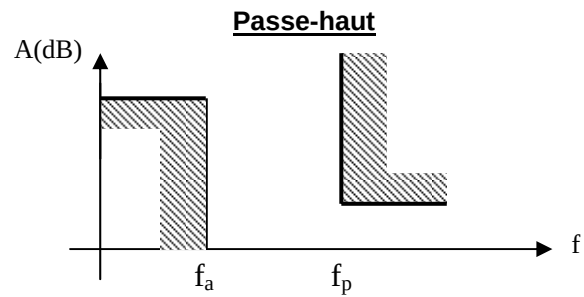
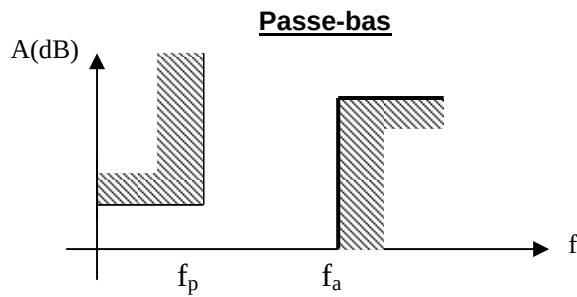
- un affaiblissement nul dans la bande de fréquence que l'on désire conserver (Bande passante)
- un affaiblissement infini dans la bande que l'on désire éliminer (Bande atténuée)

Il est impossible pratiquement de réaliser de tels filtres. Aussi se contente-t-on d'approcher cette réponse idéale en :

- conservant l'atténuation A inférieure à A_{max} dans la bande passante
- conservant l'atténuation A supérieure à A_{min} dans la bande atténuée

Cela conduit ainsi à définir un **gabarit** définissant des zones interdites et des zones dans lesquelles devront impérativement se situer les graphes représentant l'atténuation du filtre en fréquence.

Suivant le type de réponse que l'on désire obtenir, on est amené à définir 4 familles de filtres :



3.4. Notion de sélectivité et de bande relative

Au lieu de conserver explicitement les fréquences frontières comme paramètres de calcul, il est plus simple et plus parlant de leur substituer les paramètres équivalents (mais sans dimension) que sont la sélectivité k et la largeur de bande relative B .

Type de filtre	Sélectivité k	Bande relative B	Fréquence de référence
Passe-bas	$\frac{f_p}{f_a}$		f_p
Passe-haut	$\frac{f_a}{f_p}$		f_a
Passe-bande	$\frac{f_p^+ - f_p^-}{f_a^+ - f_a^-}$	$\frac{f_p^+ - f_p^-}{f_o}$	f_o
Coupe-bande	$\frac{f_a^+ - f_a^-}{f_p^+ - f_p^-}$	$\frac{f_a^+ - f_a^-}{f_o}$	f_o

Pour un filtre très sélectif, k tend vers 1.

3.5. Notion de temps de propagation de groupe

Il est défini par :

$$\tau = \frac{d\varphi}{d\omega}$$

Il caractérise le retard apporté par le filtre sur les différents harmoniques du signal d'entrée. Pour ne pas apporter de distorsion, il faut que chaque harmonique soit déphasé de φ proportionnel à ω .

Remarque : pour un signal audio, il faut qu'il soit constant

3.6. Représentation en diagramme de Bode

3.6.1. Convention de la représentation

Elles sont au nombre de deux :

- l'échelle des fréquences ou des pulsations est logarithmique
- la courbe de module est graduée en décibels : $\text{db} (H_{dB} = 20 \bullet \log \left| \frac{V_2}{V_1} \right|)$

3.6.2. Graduation logarithmique de la fréquence

Dans ce type de graduation il y a autant de distance entre 1 et 2 qu'entre 2 et 4 et qu'entre 20 et 40. Dans ce type de graduation, le 0 n'apparaît jamais, il est rejeté à l'infini à gauche. On peut graduer cet abscisse en fréquence, en pulsation, en pulsation réduite ou en p .

3.6.3. Représentation sur des échelles semi-log

Le module en décibel et l'argument sont représentés sur du papier semi logarithmique : graduation linéaire en ordonnée et logarithmique en abscisse. Mais en réalité, le fait de tracer la relation $H_{dB} = 20 \bullet \log \left| \frac{V_2}{V_1} \right|$ va conférer au système une représentation « log - log ».

3.6.4. Représentation sur des échelles semi-log

Ce type de représentation représente un double avantage :

- Elle permet de faire une compression des données en préservant la représentation des faibles valeurs.
- Tout monôme ($f(x) = ax^n$) se représente par une droite dont la pente dépend de son degré.

On profite également des propriétés du log en ordonnée, le produit se traduisant par une somme : les sommes graphiques sont très faciles à traiter.

3.6.5. Caractéristique de l'argument

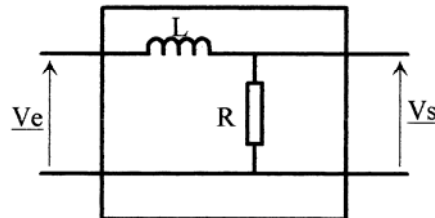
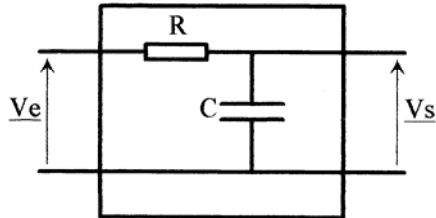
Elle n'est pas touchée en ordonné, l'abscisse est toujours logarithmique. La propriété de l'argument ($\arg(A.B) = \arg A + \arg B$) se traduit par une somme graphique dans bode.

4. FILTRE PASSIF

4.1. Filtre passif pédagogique

4.1.1. Filtre passe bas

4.1.1.1. Constitution



4.1.1.2. Fonction de transfert

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega}$$

4.1.1.3. Forme générale

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{A}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}. \text{ Par identification on trouve : } A = 1 \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{RC} \text{ ou } \omega_0 = \frac{R}{L}.$$

4.1.1.4. Représentation

$$\text{Module : } \left| \frac{V_s}{V_e} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}}$$

$$\text{Argument : } \varphi = \arg\left(\frac{V_s}{V_e}\right) = \arctg(0) - \arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -\arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

4.1.1.5. Le module

$$\text{En décibel : } \left| \frac{V_s}{V_e} \right|_{db} = 20 \log \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \right] = -20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] = -10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]$$

$$\text{Limite en 0 : } \lim_{\omega \rightarrow 0} \left| \frac{V_s}{V_e} \right|_{db} = 0 : \text{ on a une asymptote horizontale à } -0db.$$

$$\text{Limite à l'infini : } \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{V_s}{V_e} \right|_{db} = -\infty : \left| \frac{V_s}{V_e} \right|_{db} \approx -10 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = -20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

Si on parcourt une décade : de ω à 10ω :

$$\frac{\omega}{\omega_0} : -20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

$$\frac{10\omega}{\omega_0} : -20 \log \left(\frac{10\omega}{\omega_0} \right) = -20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - 20 \log 10 = -20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - 20$$

Le passage d'une décade à l'autre retire 20db à l'asymptote : nous avons une asymptote à $-20db / \text{décade}$

Remarque :

- si on multiplie par 2 la fréquence, la pente est la même mais s'exprime par $-6db / \text{octave} = -20db / \text{décade}$.
- La droite asymptotique passe par 0db pour $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ (mais pas la courbe réelle).

Pour la courbe réelle : pour $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$, $\left| \frac{V_s}{V_e} \right|_{db} = -10 \log(2) = 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -3db$

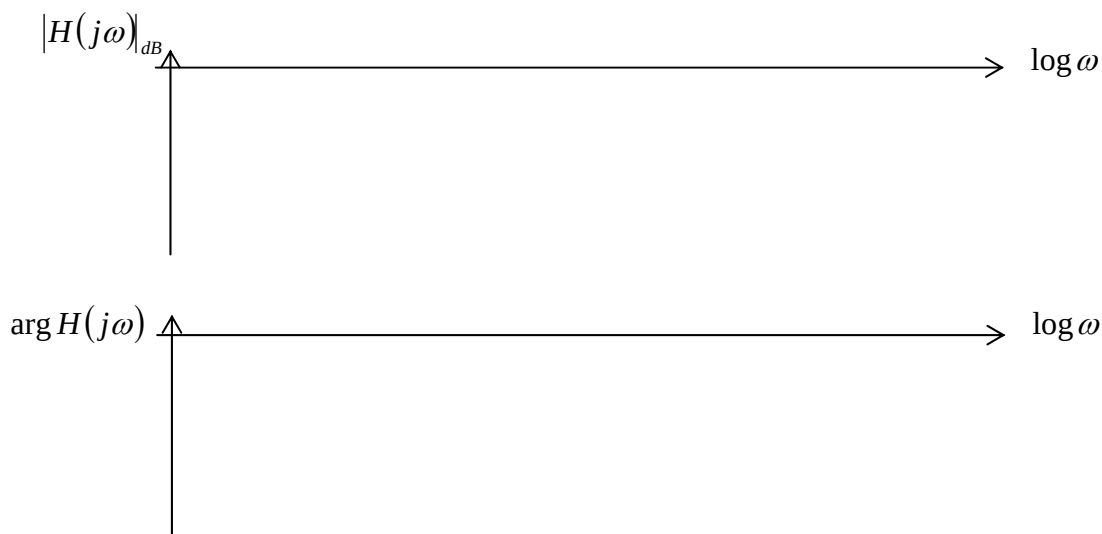
4.1.1.6. L'argument

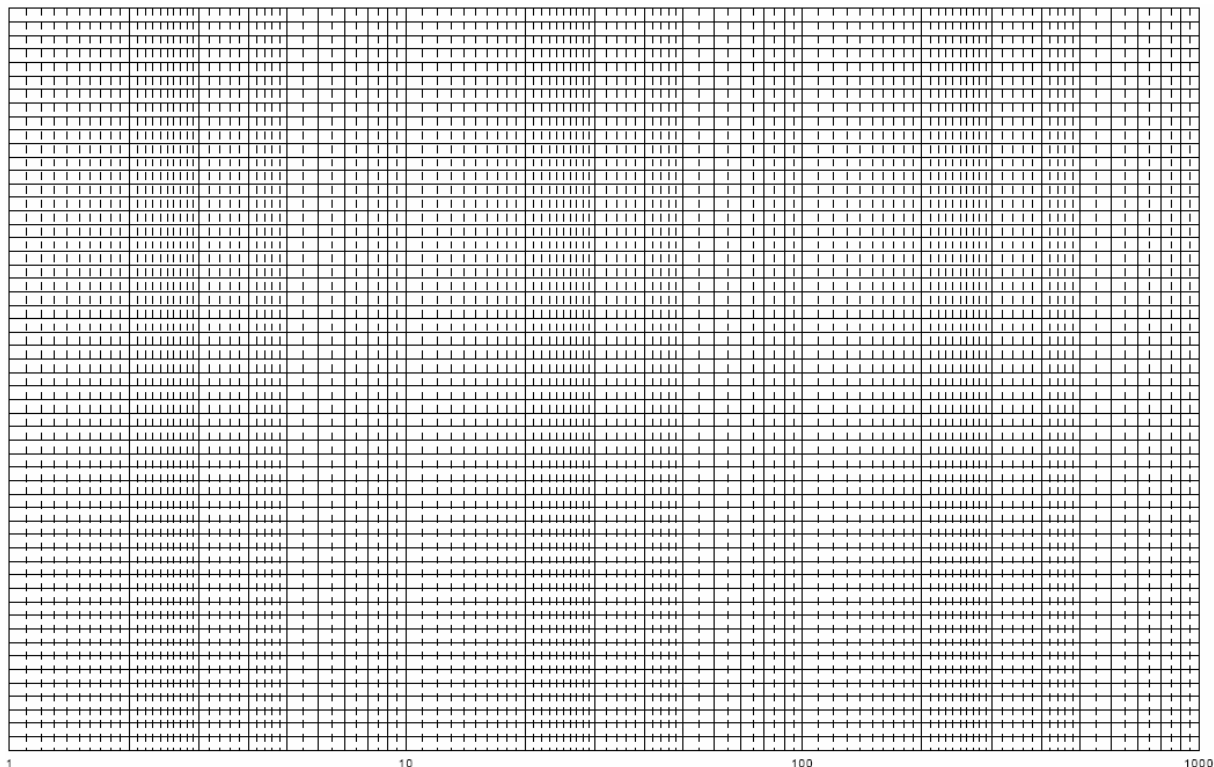
Limite en 0 : $\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi = 0$: on a une asymptote horizontale en 0

Pour $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

Limite à l'infini : $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi = -\frac{\pi}{2}$: on a une asymptote horizontale en $-\frac{\pi}{2}$.

4.1.1.7. Tracés





4.1.1.8. Pulsation de coupure

Dans la pratique, la coupure n'est pas aussi nette que dans les filtres idéaux. On considère que la pulsation de coupure est atteinte si l'atténuation a diminué d'un certain nombre de db par rapport au plateau. Par référence aux filtres du premier ordre, le calcul de la pulsation de coupure ω_c se fait, sauf précision contraire, pour une atténuation de $-3db$.

$$\left| H(j\omega_c) \right|_{dB} = \left| \frac{V_s}{V_e} \right|_{dB \text{ à } \omega_c} = \left| \frac{V_s}{V_e} \right|_{dB \text{ au plateau}} - 3db.$$

$$\text{Cela revient au calcul suivant sans les décibels : } \left| \frac{V_s}{V_e} \right|_{\omega_c}^2 = \frac{\left| \frac{V_s}{V_e} \right|_{\text{plateau}}^2}{2}.$$

Si la coupure est calculée à $-6db$, la division sera par 4 au lieu de 2.

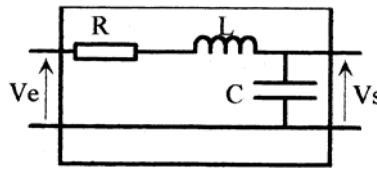
On ne doit pas confondre coupure et cassure. Pour un premier ordre :

$$\left| \frac{V_s}{V_e} \right|_{dB \text{ à } \omega_c} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_0} \right)^2} = \frac{\left| \frac{V_s}{V_e} \right|_{\text{plateau}}^2}{2} = \frac{1}{2} : \text{ on en tire que } \left(\frac{\omega_c}{\omega_0} \right)^2 = 1, \text{ c-a-d que } \omega_c = \omega_0.$$

Dans un premier ordre, pulsations de coupure (ω_c) et cassure (ω_0) sont confondues. Pour les filtres d'ordre supérieur, $\omega_c < \omega_0$.

4.1.2. Filtre passe bas du deuxième ordre RLC

4.1.2.1. Constitution



4.1.2.2. Fonction de transfert

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

4.1.2.3. Forme générale

$$\frac{A}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Par identification on obtient :

$$A = 1$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

$$m = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$$

m: coefficient d'amortissement et ω_0 est la pulsation propre. On remarque que L et C règle ω_0 et que si R est variable de 0 à l'infini ω_0 et m sont pratiquement indépendants.

4.1.2.4. Étude du polynôme du dénominateur

4.1.2.4.1. Factorisation

$-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + 1$ est un polynôme du second degré en $j \frac{\omega}{\omega_0}$ que l'on peut chercher à

factoriser sous la forme $\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right)$, avec ω_1 et ω_2 réels. Par identification, on

montre que : $\omega_{1,2} = \omega_0 \left(m \pm \sqrt{m^2 - 1}\right)$ si $m \geq 1$.

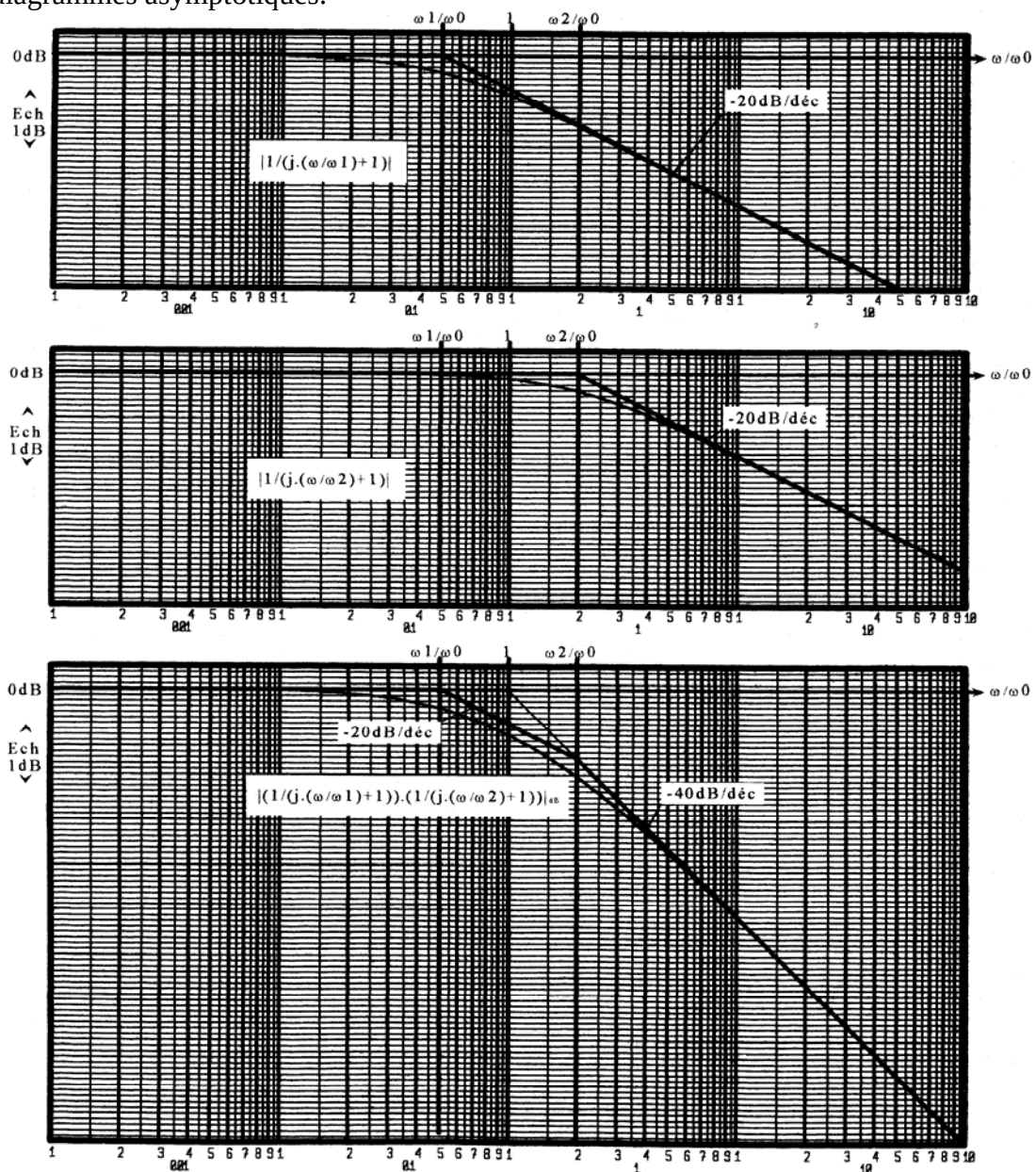
Si $m \geq 1$, $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ est la moyenne géométrique de ω_1 et ω_2 . Sur une échelle logarithmique, ω_1 et ω_2 seront placés de part et d'autre de ω_0 et de façon symétrique.

4.1.2.4.2. Intérêt de la factorisation

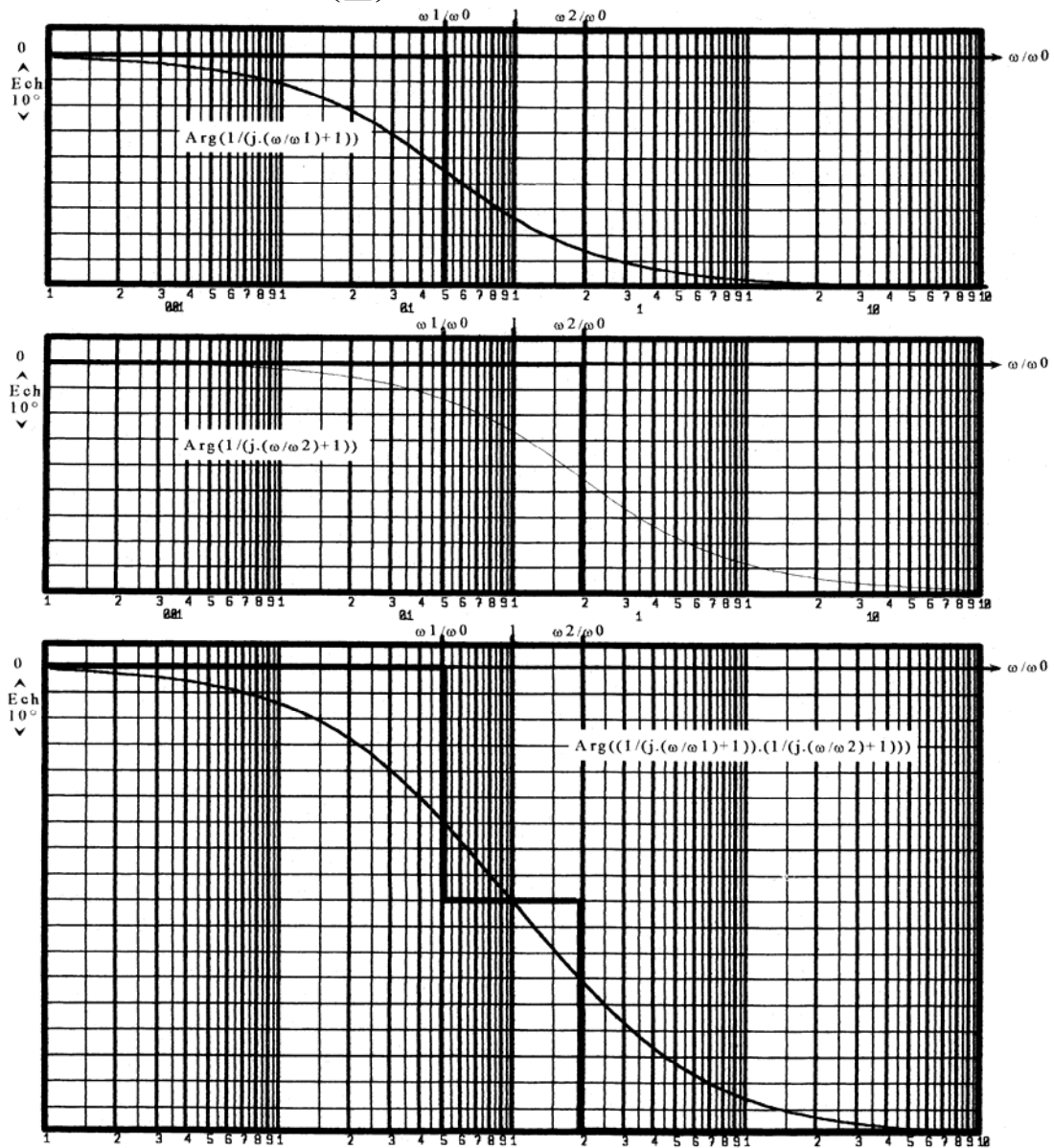
Si $m \geq 1$, on peut écrire : $\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}} \cdot \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}}$.

Soit en décibel : $\left| \frac{V_s}{V_e} \right|_{db} = -20 \log \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2} \right) - 20 \log \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2} \right)$.

Pour le module en db on peut additionner deux courbes du premier ordre dont on peut donner les diagrammes asymptotiques.



Pour l'argument on a : $\varphi = \arg\left(\frac{V_s}{V_e}\right) = -\arctg\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) - \arctg\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right) :$



4.1.2.4.3. Surtension

Si $m < 1$ on ne peut pas factoriser, on ne peut travailler qu'avec un diagramme asymptotique à deux asymptotes (horizontale à $-0db$ et puis une droite à $-40db/décade$).

On constate que, suivant les valeurs de m , on peut assister à une surtension en sortie due à des conditions de fonctionnement proches d'un phénomène de résonance.

Remarque : si on prend $\omega = \omega_0$, alors
$$\left(\frac{V_s}{V_e} \right)_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} = \frac{1}{2mj}$$

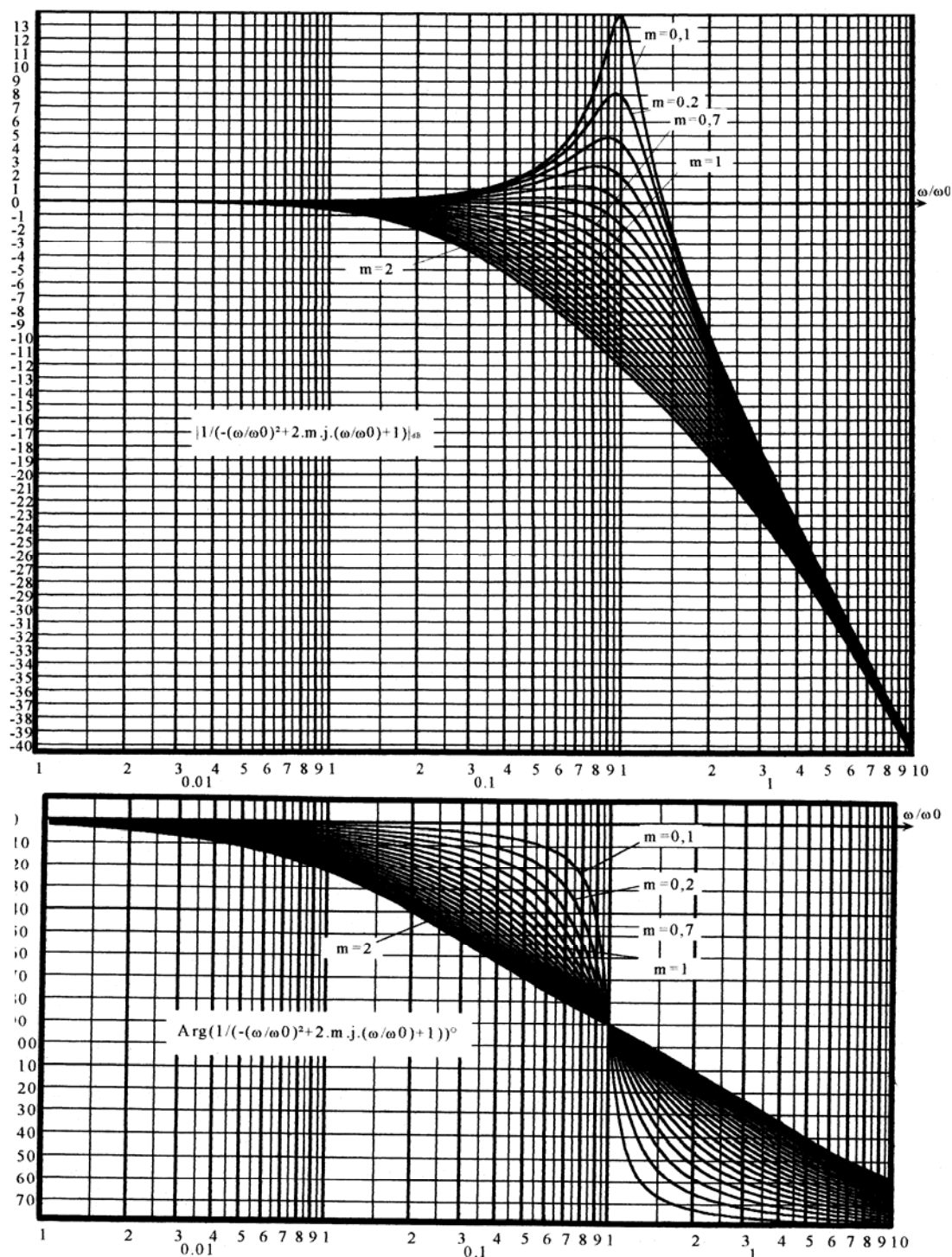
On peut constater que si $m < \frac{1}{2}$ alors la valeur efficace de $V_s > V_e$. On aura aussi V_s et V_e en quadrature. On peut alors extraire m : on remarque que pour cette pulsation $m = \frac{1}{2} \frac{V_e}{V_s}$. En pratique, la détection de 2 signaux en quadrature est facile, ce qui permet en un point de mesure de déterminer ω_0 et m .

Pour étudier le phénomène de surtension, il suffit d'analyser les variations de notre fonction de transfert et de détecter un extremum. On montre que cette surtension est possible si

$$m \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ il a lieu pour } \omega = \omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2} \text{ et ce maximum vaut } \left| \frac{V_s}{V_e} \right|_{\omega=\omega_{\max}} = \frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}}.$$

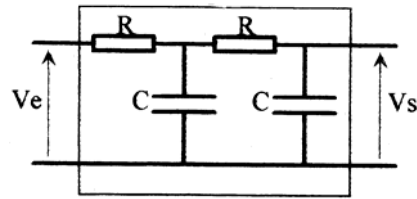
En récapitulatif :

m	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1		∞
Décomposable	non	non	non	non	oui	oui	oui
ω_1					ω_0	$\omega_0(m - \sqrt{m^2 - 1})$	0
ω_2					ω_0	$\omega_0(m + \sqrt{m^2 - 1})$	∞
Surtension	oui	oui	oui	non	non	non	non
$\omega_{\max}$	ω_0	$\omega_0\sqrt{1 - 2m^2}$	0				
Maximum	∞	$\frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}}$	1				



4.1.3. Filtre passe bas du deuxième ordre par la mise en cascade de 2 premier ordre

4.1.3.1. Constitution



4.1.3.2. Fonction de transfert

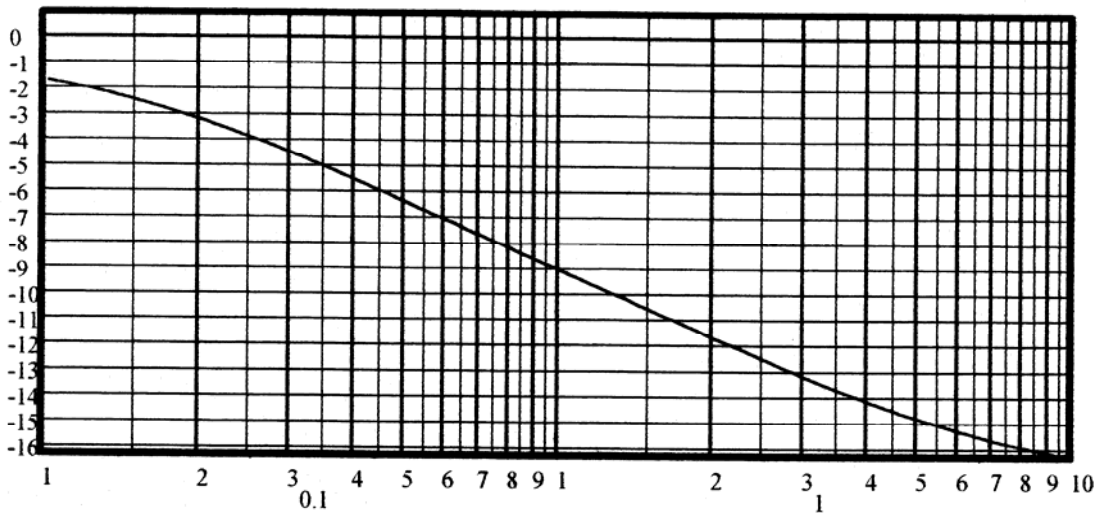
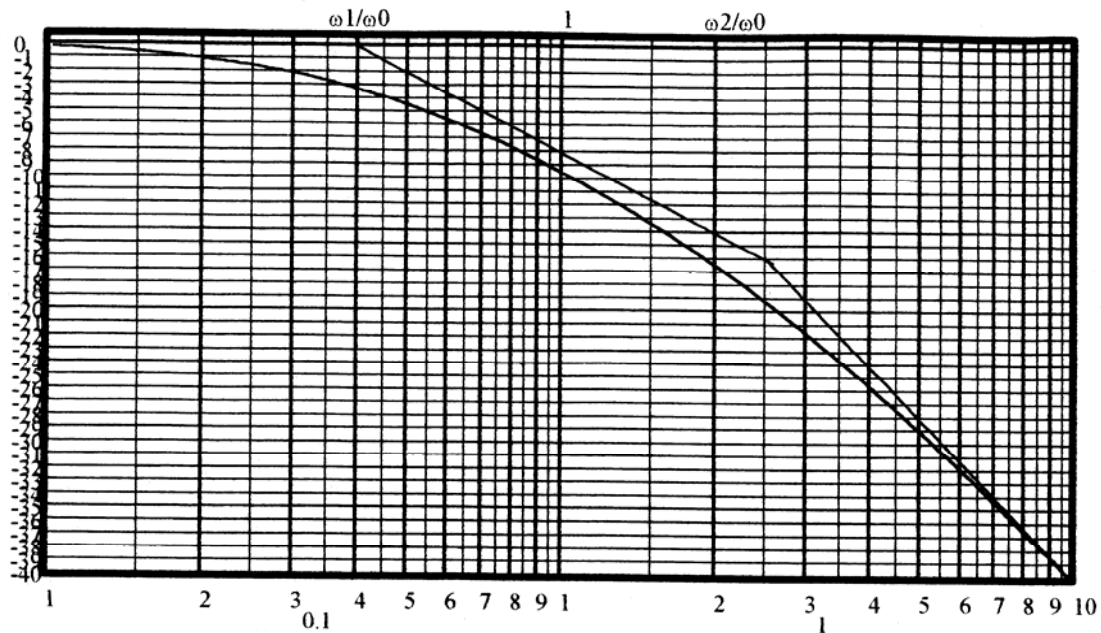
On montre que $\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}$

Par identification à $\frac{A}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ on trouve : $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $m = \frac{3}{2}$.

On peut donc le mettre sous la forme :

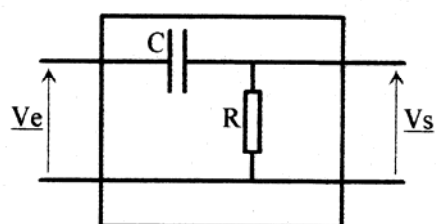
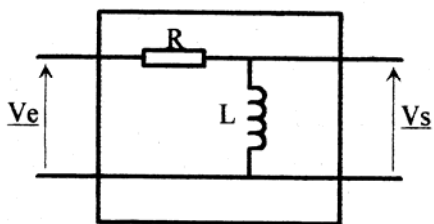
$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}} \cdot \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}} \text{ avec de } \omega_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2RC} \text{ et } \omega_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2RC}.$$

4.1.3.3. Tracés



4.1.4. Filtre passe haut du premier ordre

4.1.4.1. Constitution



4.1.4.2. Fonction de transfert

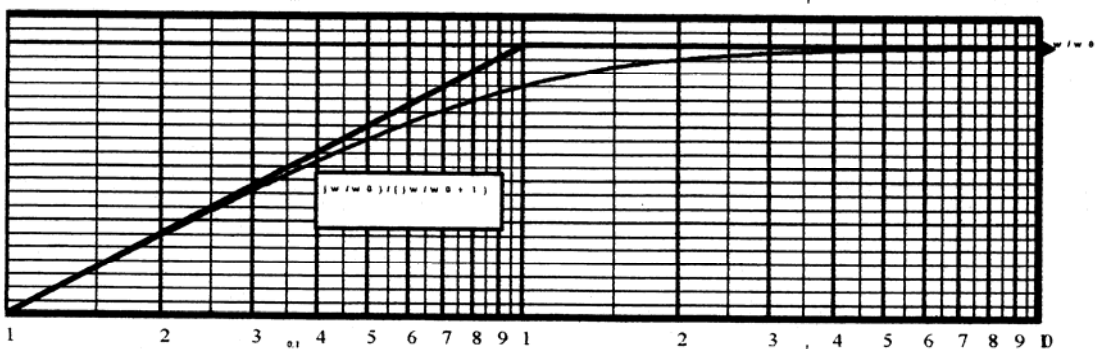
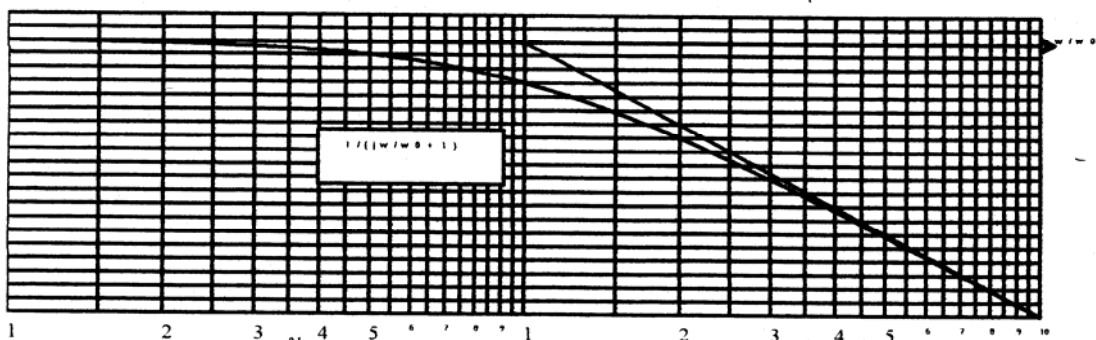
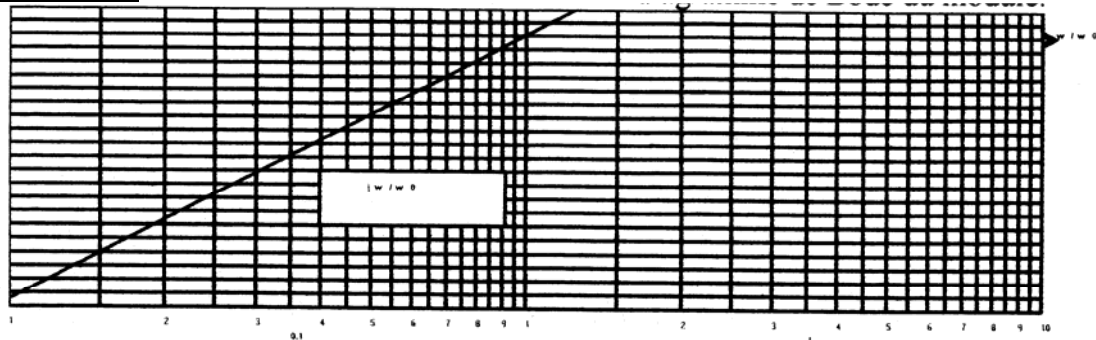
$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{j \frac{L}{R} \omega}{1 + j \frac{L}{R} \omega}$$

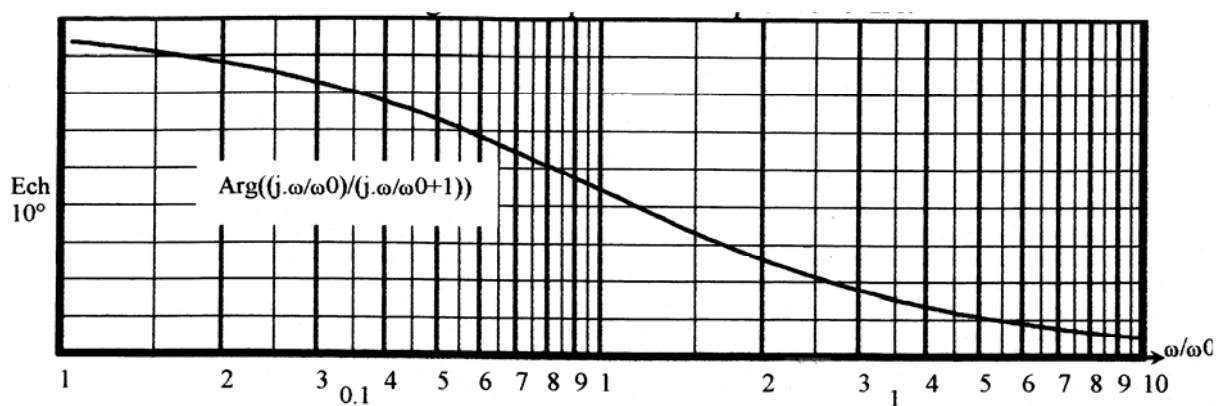
4.1.4.3. Forme générale

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{A \cdot j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}. \text{ Par identification on trouve : } A=1 \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{RC} \text{ ou } \omega_0 = \frac{R}{L}.$$

4.1.4.4. Tracés

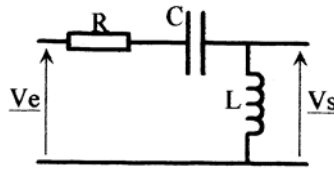


Argument : $\varphi = \arg\left(\frac{V_s}{V_e}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$. Il suffit d'ajouter $\frac{\pi}{2}$ au terme d'un passe bas.



4.1.5. Filtre passe haut du deuxième ordre

4.1.5.1. Constitution



4.1.5.2. Fonction de transfert

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{-LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

4.1.5.3. Forme générale

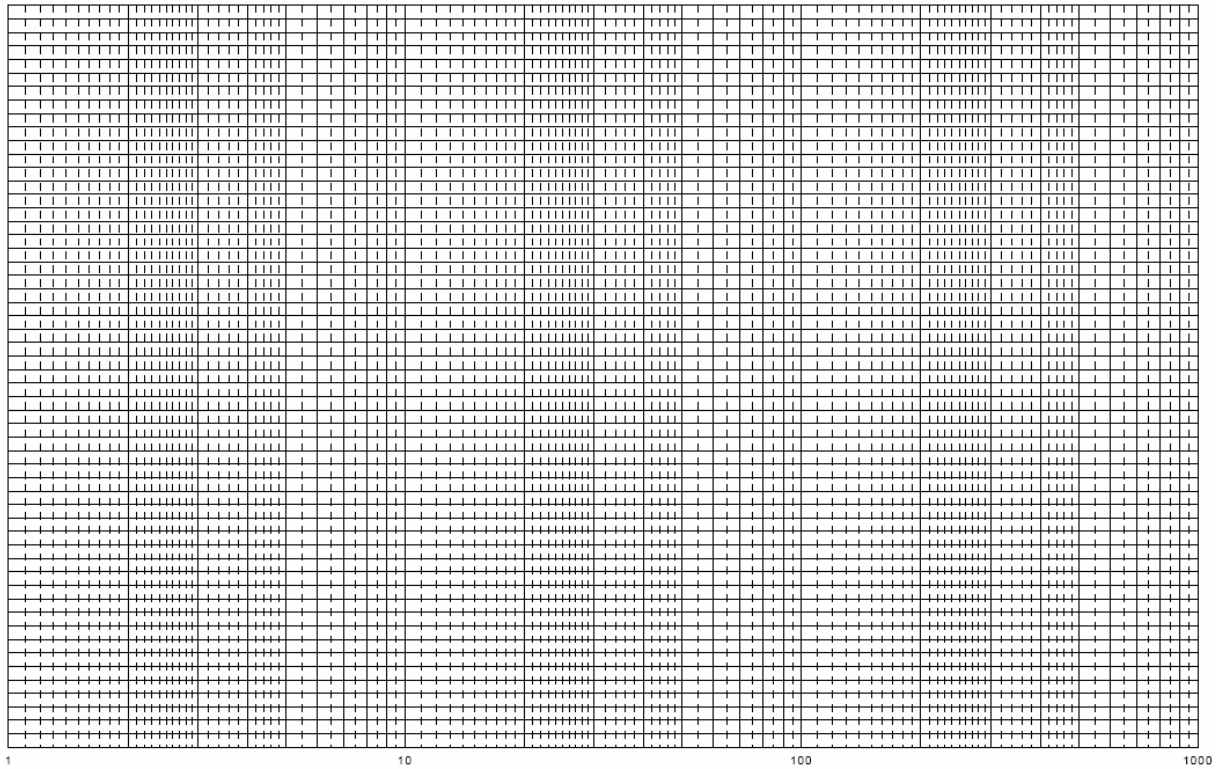
$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{A \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}.$$

Par identification on trouve : $A = 1$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$.

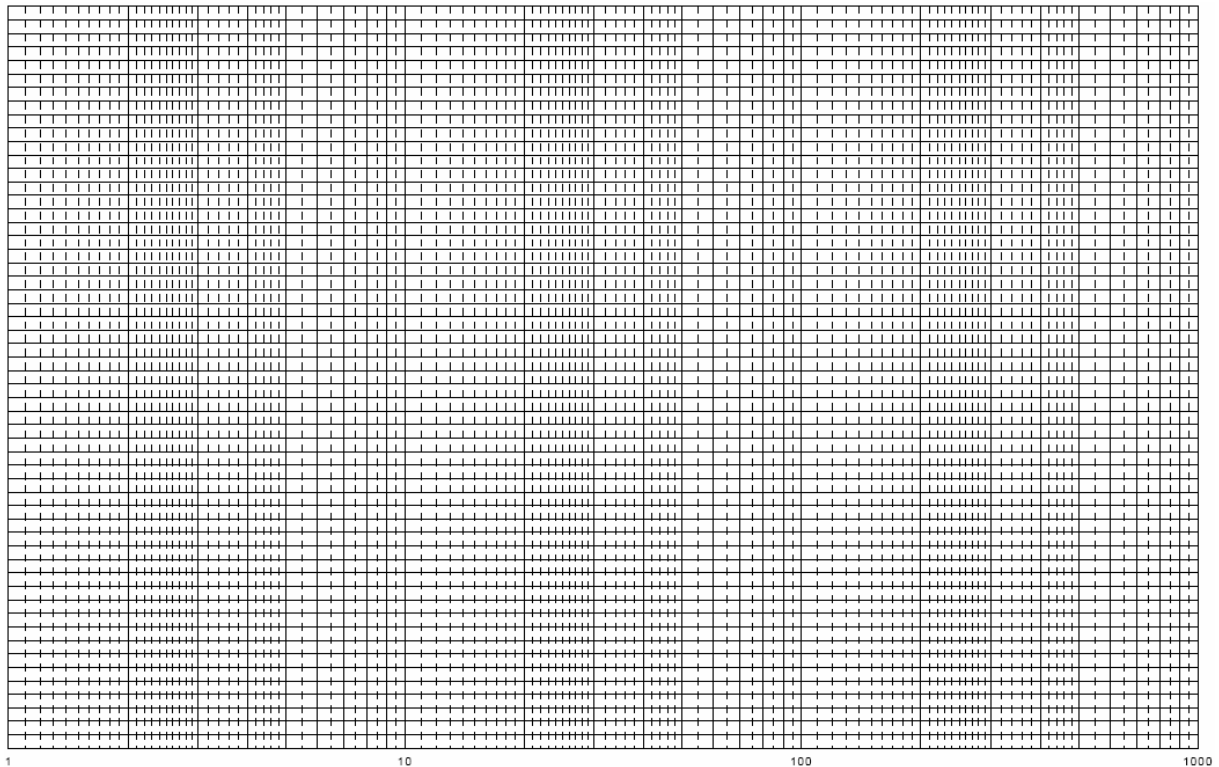
4.1.5.4. Tracés

$$\left| \frac{V_s}{V_e} \right|_{db} = 40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - 10 \log \left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + 4m^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]$$

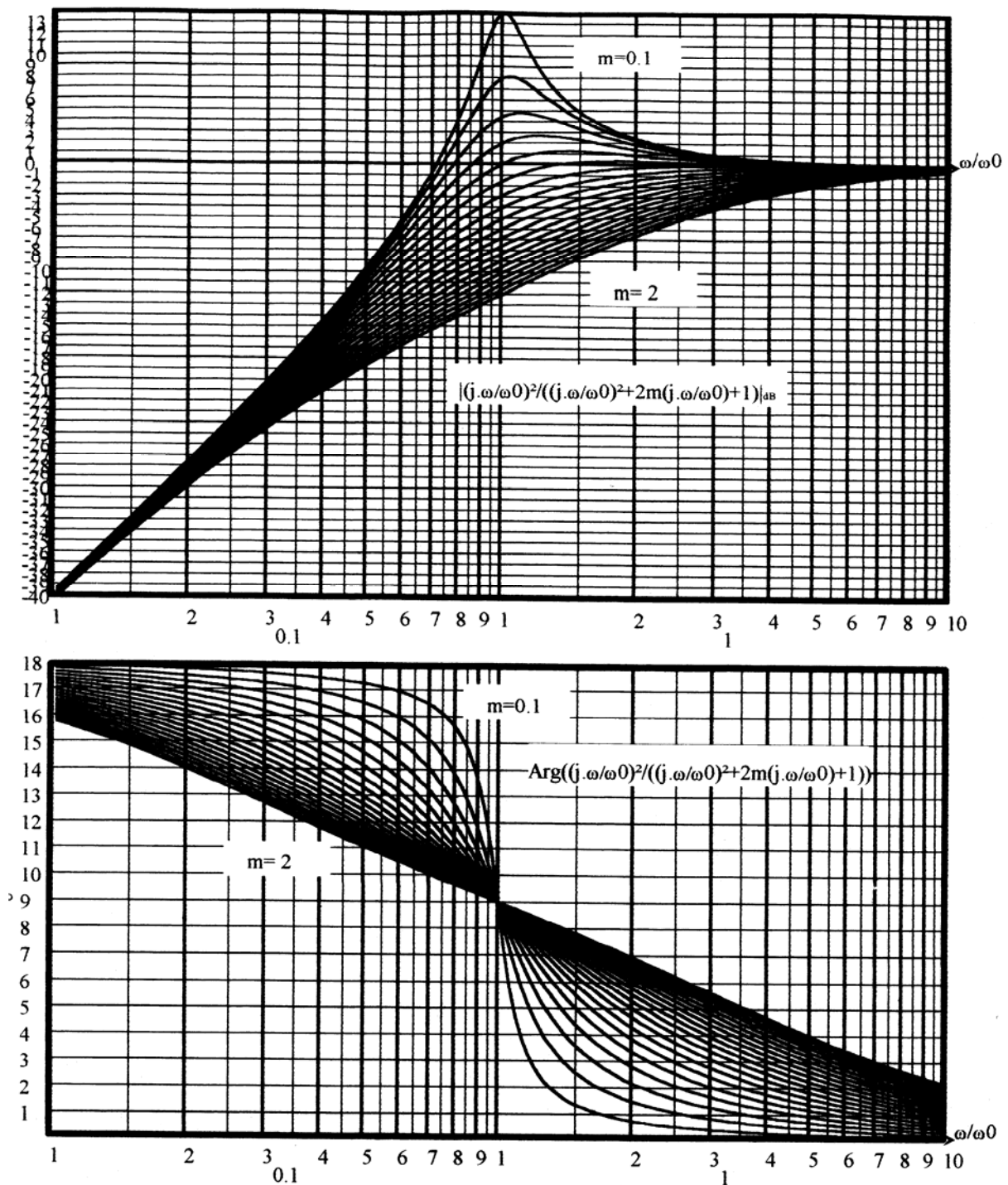
C'est la somme du passe bas du deuxième ordre avec une droite de $+40db/décade$ passant par $0db$ pour $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$.



Pour l'argument, le numérateur amène un déphasage de π par rapport au filtre passe bas du deuxième ordre.



Pour différentes valeurs de m on obtient :



4.1.6. Filtre passe-bande

4.1.6.1. Constitution

Les filtres passe-bande sont constitués de deux parties :

- une partie qui fait chuter la tension de sortie à basse fréquence,
- une partie qui fait chuter la tension de sortie à haute fréquence.

On pourra avoir un passe-bande avec :

- un circuit RLC,
- une association en cascade d'un passe-haut et d'un passe-bas,
- des montages spécifiques.

4.1.6.2. Fonction de transfert, forme générale

$$\frac{V_s}{V_e} = A \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

4.1.6.3. Déterminations et caractérisations

4.1.6.3.1. Pulsations de coupure

La bande passante est la plage des fréquences ou de pulsations comprise entre les fréquences ou les pulsations de coupure. Ces deux valeurs marquent la bande passante du filtre.

Les pulsations de coupure sont calculées à partir de la valeur maximale de $\left| \frac{V_s}{V_e} \right|$.

La pulsation $\omega_{\max}$ permettant d'accéder au maximum s'obtient en transformant $\frac{V_s}{V_e}$:

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{A}{\frac{\omega_0}{j\omega} + 2m + j \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{A}{j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) + 2m}$$

Le maximum est atteint pour $\omega = \omega_{\max} = \omega_0$, alors $\left(\frac{V_s}{V_e} \right)_{\omega_{\max}} = \frac{A}{2m}$.

La calcul des pulsations de coupure ω_{Ci} se fait généralement à $-3db$. Ainsi on a :

$$\left| \frac{V_s}{V_e} \right|_{\omega_{Ci}}^2 = \frac{A^2}{\left(\frac{\omega_{Ci}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{Ci}} \right)^2 + 4m^2} = \frac{\left| \frac{V_s}{V_e} \right|_{\text{plateau}}^2}{2} = \frac{A^2}{8m^2}.$$

Par résolution de l'équation (équation du 2nd ordre) on obtient :

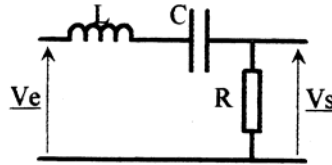
$$\omega_{C1} = \omega_0 \left(\sqrt{1+m^2} - m \right) \text{ et } \omega_{C2} = \omega_0 \left(\sqrt{1+m^2} + m \right)$$

On peut remarquer que : $\omega_{C1} \omega_{C2} = \omega_0^2$. Le maximum se produit pour la moyenne géométrique des 2 pulsations de coupure.

4.1.6.3.2. Sélectivité du filtre

Une grandeur importante pour un filtre passe bande est sa sélectivité. Elle est notée par le coefficient de qualité $Q = \frac{\omega_0}{\omega_{C2} - \omega_{C1}} = \frac{\omega_0}{\omega_0(\sqrt{1+m^2} + m) - \omega_0(\sqrt{1+m^2} - m)} = \frac{1}{2m}$

4.1.6.4. Passe bande RLC



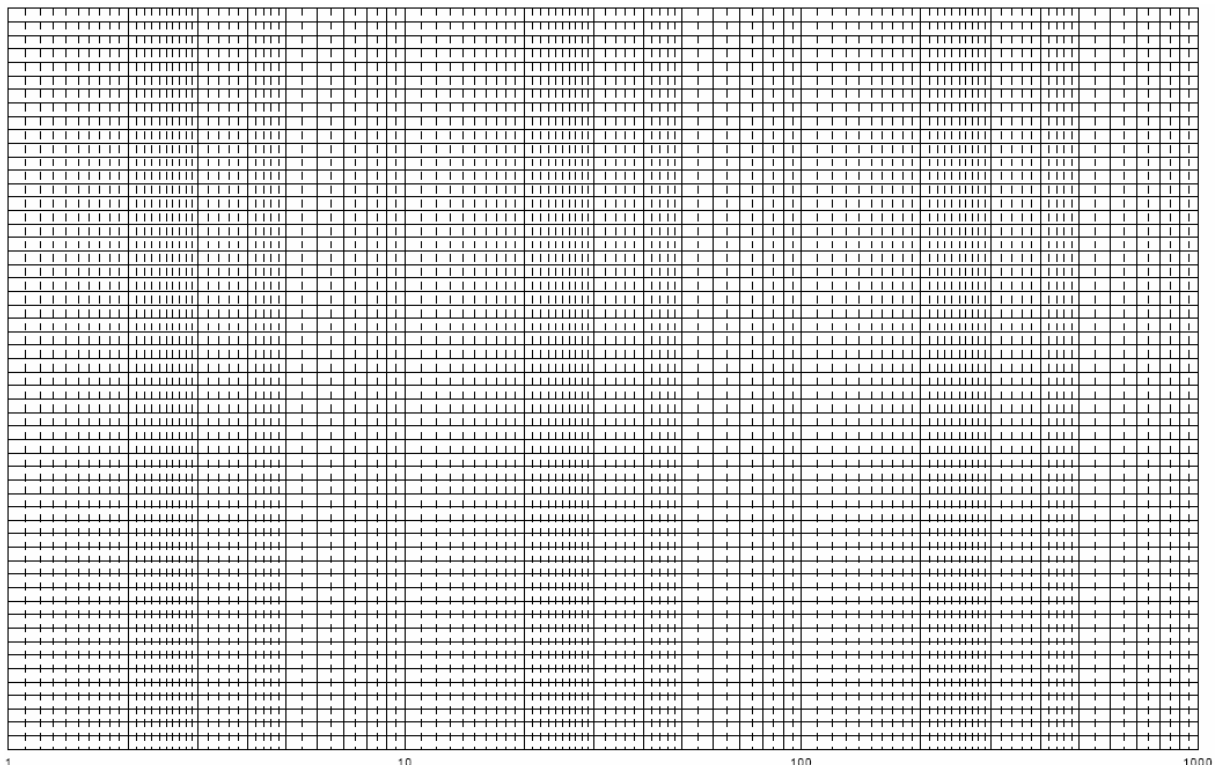
On a la fonction de transfert :

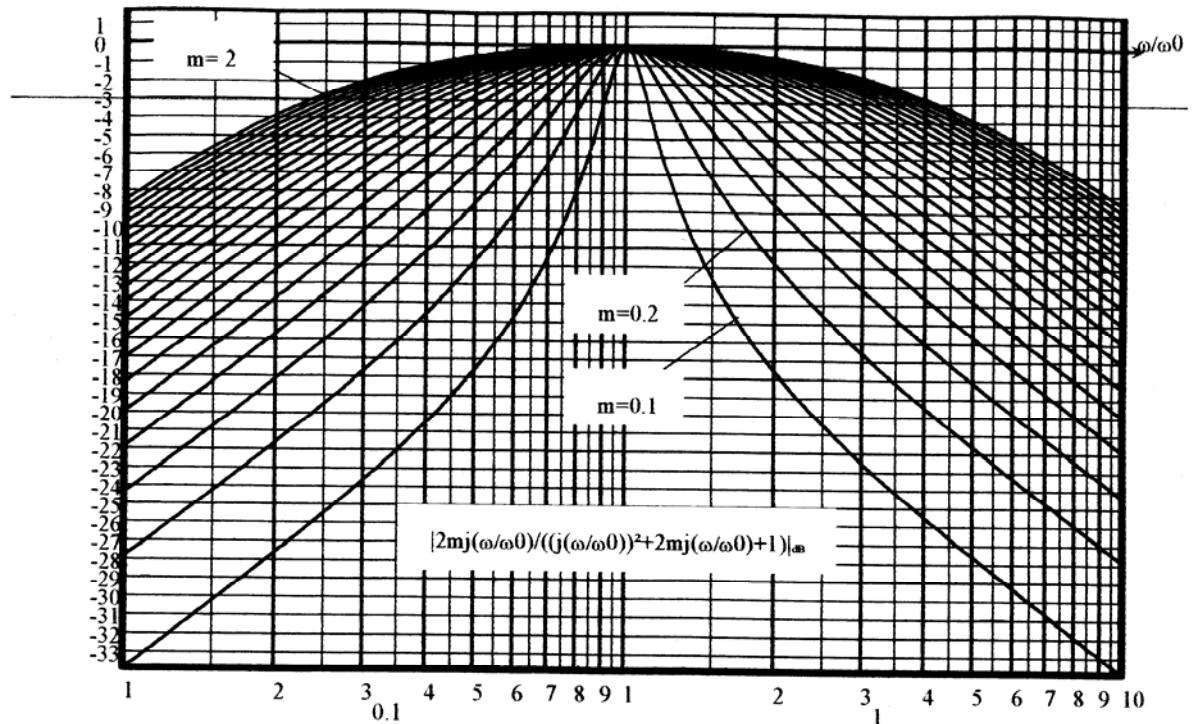
$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Par identification à la forme canonique : $A \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ on a :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{et} \quad A = R \sqrt{\frac{C}{L}} = 2m.$$

Toutes les courbes passent au point 0db pour $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$: c'est la résonance série de courant où les impédances de L et C s'annulent réciproquement, l'ensemble L et C se comportent comme un fil et $V_s = V_e$.

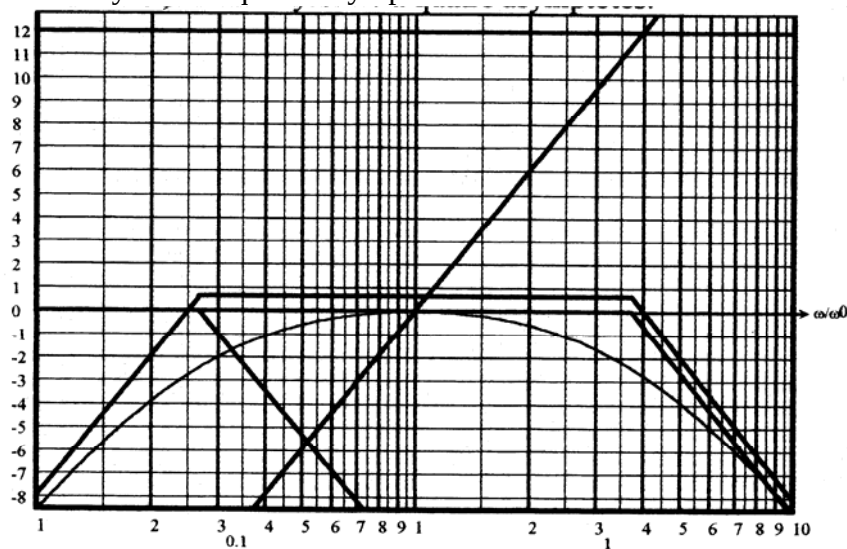




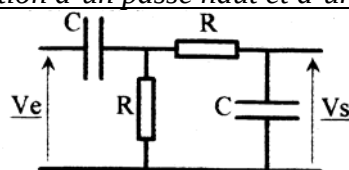
Toutes les courbes n'ont pas le même diagramme asymptotique. Par exemple, si $m \geq 1$, on

peut écrire : $\frac{V_s}{V_e} = \frac{2mj \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right)}$ avec $\omega_{1,2} = \omega_0 (m \pm \sqrt{m^2 - 1})$.

Pour $m = 2$, on a un système à quatre asymptotes :



4.1.6.5. Passe bande par association d'un passe haut et d'un passe bas

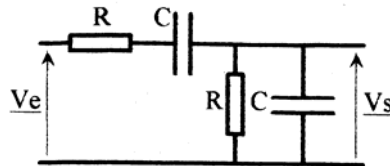


On obtient la fonction de transfert suivante : $\frac{V_s}{V_e} = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}$.

Par identification à la forme canonique : $A \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

avec : $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, $m = \frac{3}{2}$ et $A = 1$.

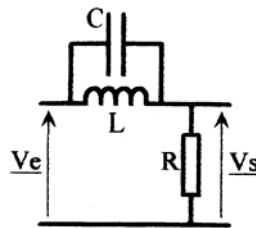
4.1.6.6. Pont de Wien



On obtient la fonction de transfert suivante : $\frac{V_s}{V_e} = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}$; c-a-d la fonction de transfert résultant de l'association d'un passe haut et d'un passe bas.

4.1.7. Filtre réjecteur de bande : le circuit bouchon

4.1.7.1. Constitution



4.1.7.2. Fonction de transfert

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{-LC\omega^2 + 1}{1 + j \frac{L}{R} \omega - LC\omega^2}$$

4.1.7.3. Forme générale

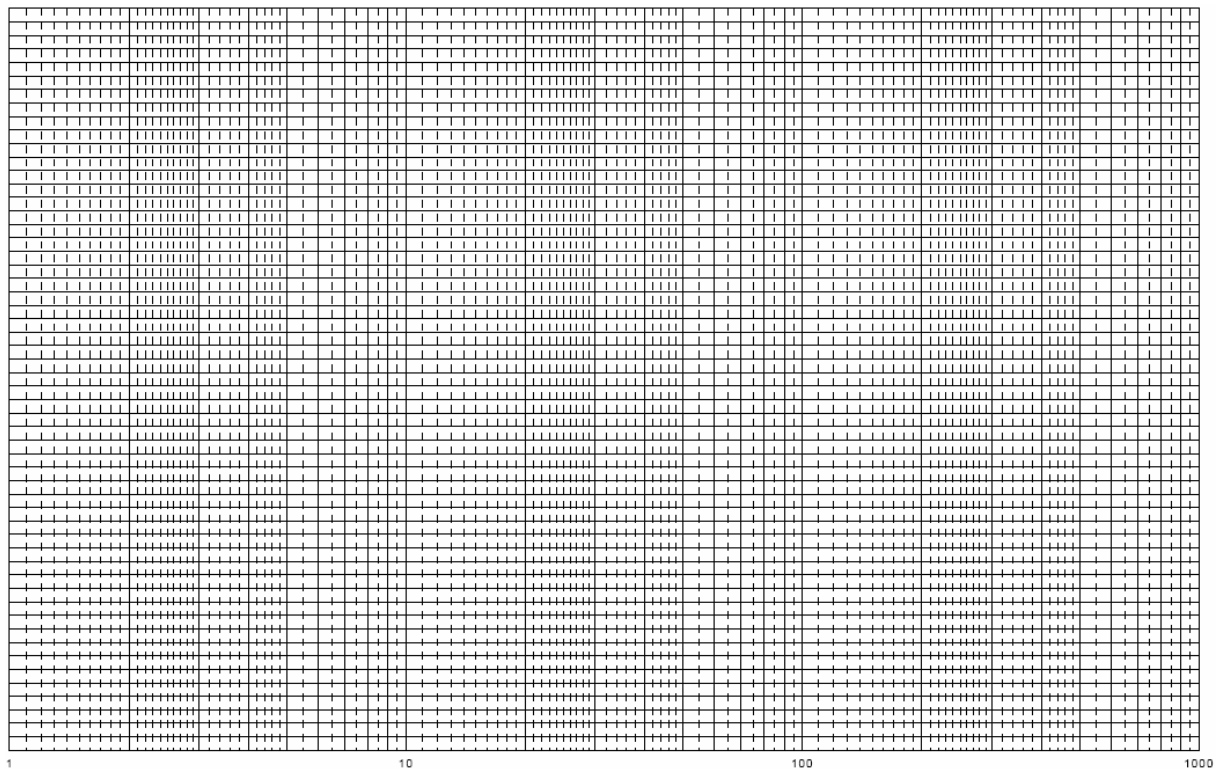
$$A \frac{1 + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Par identification à la forme canonique on obtient : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $m = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ et $A = 1$.

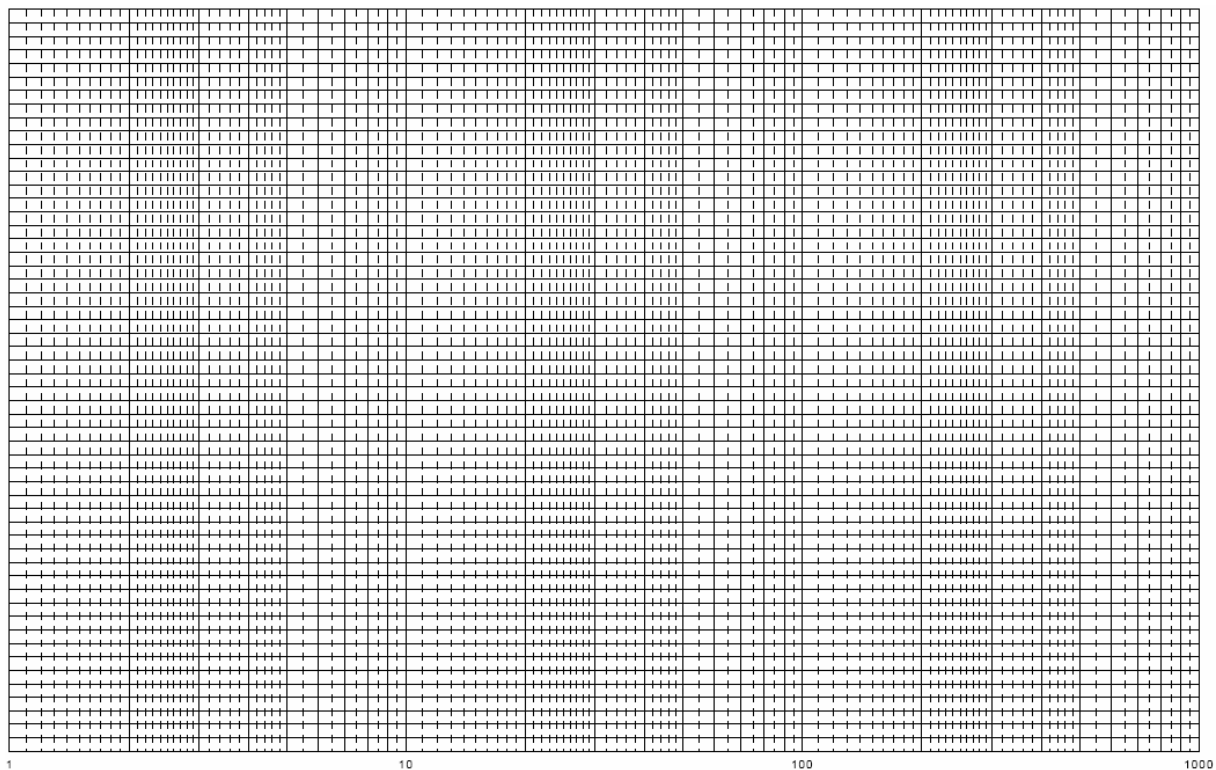
4.1.7.4. Tracés

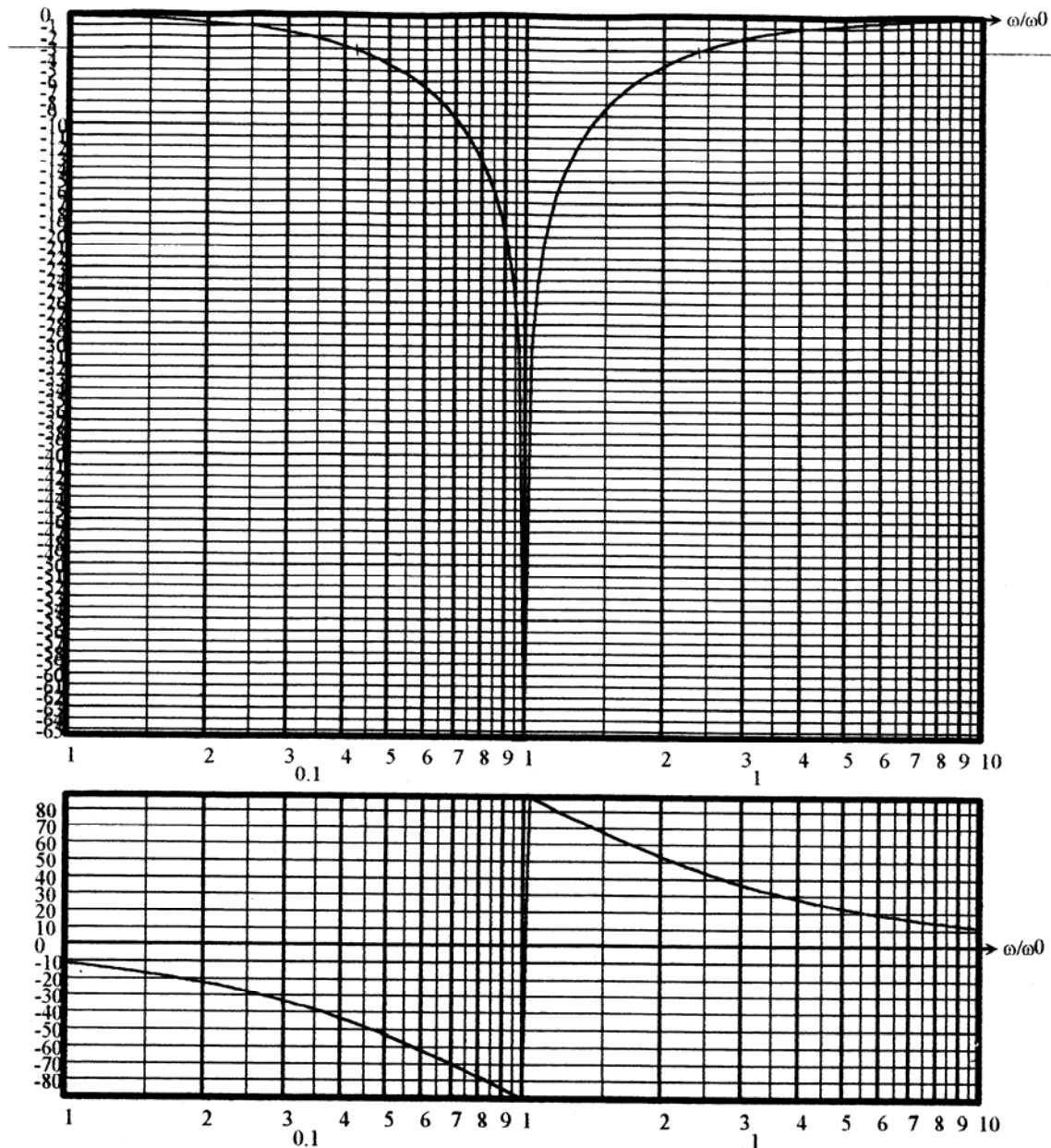
Les diagrammes ci-dessous ont été calculés pour $m = 1$. La valeur à $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ est en réalité à

– ∞ . Le coefficient de qualité $Q = \frac{\omega_0}{\omega_{c2} - \omega_{c1}} \cong 0,5 = \frac{1}{2m}$.



L'argument :



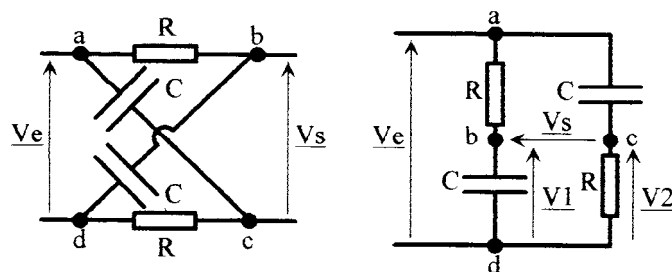


4.1.8. Passe tout

4.1.8.1. Fonction

On cherche à déphaser le signal de sortie par rapport au signal d'entrée.

4.1.8.2. Montage



4.1.8.3. Fonction de transfert

$$\underline{V_s} = \underline{V_1} - \underline{V_2} = \underline{V_e} \cdot \left(\frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} \right) - \underline{V_e} \cdot \left(\frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} \right) = \underline{V_e} \cdot \left(\frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega} \right)$$

Dont on tire:

$$\left| \frac{V_s}{V_e} \right| = 1 = cste$$

$$\text{Arg} \left(\frac{V_s}{V_e} \right) = -2 \cdot \arctan(R \cdot C \cdot \omega) = \varphi$$

La tension de sortie est donc déphasée par rapport à la tension d'entrée.

4.1.8.4. Forme générale

$$A \frac{1 - j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

4.1.8.5. Application: ligne à retard

Si le signal d'entrée est périodique de fréquence f , si sa décomposition en série de Fourier est telle que les harmoniques les plus significatives s'arrêtent au rang i et enfin si

$i\omega = i2\pi f \ll \frac{1}{RC}$, on a alors $\varphi \cong -2RC\omega = -\frac{\omega}{\omega'}$. Avec :

$$v_e(t) = E_0 + E_1 \sin(\omega t + \theta_1) + E_2 \sin(2\omega t + \theta_2) + \dots + E_i \sin(i\omega t + \theta_i)$$

On a :

$$\begin{aligned} v_s(t) &= E_0 + E_1 \sin\left(\omega t + \theta_1 - \frac{\omega}{\omega'}\right) + E_2 \sin\left(2\omega t + \theta_2 - 2\frac{\omega}{\omega'}\right) + \dots + E_i \sin\left(i\omega t + \theta_i - i\frac{\omega}{\omega'}\right) \\ &= E_0 + E_1 \sin\left(\omega\left(t - \frac{1}{\omega'}\right) + \theta_1\right) + E_2 \sin\left(2\omega\left(t - \frac{1}{\omega'}\right) + \theta_2\right) + \dots + E_i \sin\left(i\omega\left(t - \frac{1}{\omega'}\right) + \theta_i\right) \end{aligned}$$

On constate que le signal de sortie est décalé dans le temps de $\frac{1}{\omega'} = 2RC$: $v_s(t) = v_e(t - 2RC)$

4.1.9. Tableau des formes canoniques

Type	Forme canonique
Passe bas du 1 ^{er} ordre	$\frac{A}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$
Passe bas du 2 nd ordre m: coefficient d'amortissement	$\frac{A}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$
Passe haut du 1 ^{er} ordre	$\frac{A \cdot j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$
Passe haut du 2 nd ordre	$\frac{A \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$
Passe bande Facteur de qualité $Q = \frac{\omega_0}{\omega_{c2} - \omega_{c1}}$	$A \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$
Coupe bande (réjecteur) Facteur de qualité $Q = \frac{\omega_0}{\omega_{c2} - \omega_{c1}}$	$A \frac{1 + \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$
Passe tout	$A \frac{1 - j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$

Le terme $1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2$ peut se mettre sous la forme : $\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1} \right) \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2} \right)$ avec $\omega_{1,2} = \omega_0 (m \pm \sqrt{m^2 - 1})$ si $m \geq 1$.

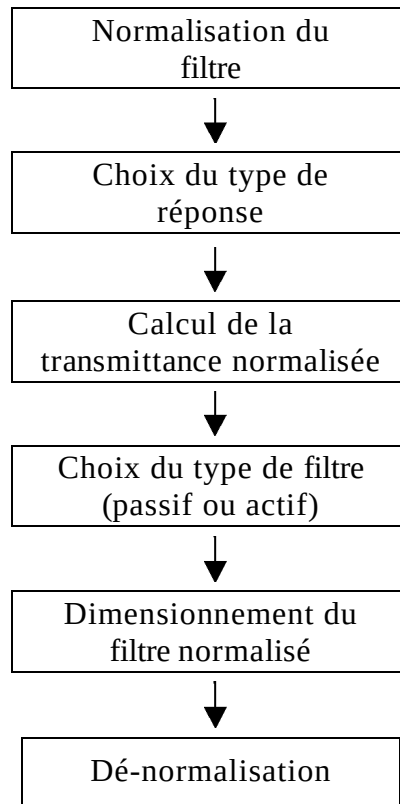
De plus, si $m \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors on montre pour que pour un passe bas ou un passe haut du 2nd ordre

il va y avoir une surtension en sortie à $\omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2}$: $\left. \frac{V_s}{V_e} \right|_{\omega=\omega_{\max}} = \frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}}$.

4.2.Filtres passifs polynomiaux : synthèse de filtres

Le but est d'être capable de dimensionner, suivant un gabarit de filtre donné, un filtre soit avec des composants passifs, soit avec des composants actifs (respectivement filtres dit 'passifs' et filtres dit 'actifs'). Cela permet de choisir le type de réponse du filtre de telle sorte qu'il s'adapte au mieux aux besoins.

4.2.1.Description de la démarche



4.2.2. Normalisation

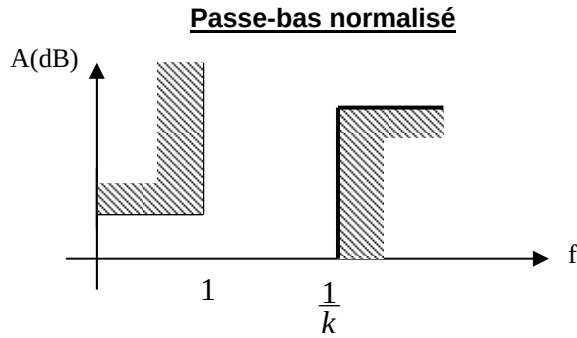
4.2.2.1. Normalisation en fréquence

Elle consiste à choisir comme unité de fréquence, non plus le Hertz, mais une fréquence de référence associée au gabarit.

On utilise généralement la fréquence de coupure :

- f_p pour les filtres passe-bas
- f_a pour les filtres passe-haut
- f_o pour les filtres passe-bande et coupe-bande

On essaie le plus souvent possible de symétriser les gabarits des filtres coupe-bande et passe-bande.



4.2.2.2. Normalisation des impédances

Chaque domaine de l'électronique possède son impédance caractéristique :

- signal d'instrumentation : 50Ω
- télévision : 75Ω
- téléphone RTC : 600Ω

On va normaliser les différents éléments passifs du filtre par rapport à cette impédance caractéristique.

a) Résistance : on remplace R par $r_n = \frac{R}{R_u}$; R_u ($= R_c$ résistance de charge du filtre) correspond au domaine utilisé.

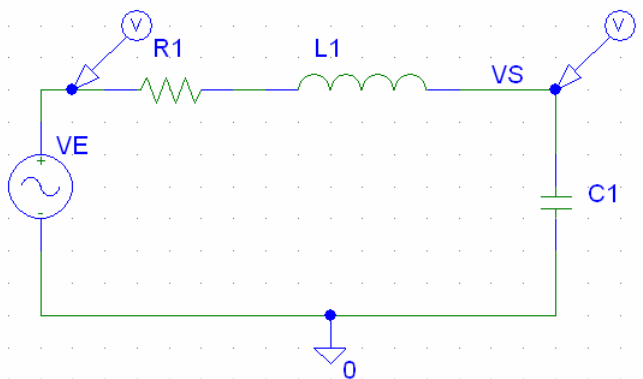
b) Inductance : la normalisation se fait à ω_0 et par rapport à R_u : $\lambda_n = \frac{L\omega_0}{R_u} = \frac{L}{L_u}$.

En effet, on peut définir une self unité $\frac{L_u\omega_0}{R_u} = 1$.

c) Capacité : la normalisation se fait à ω_0 et par rapport à R_u : $\gamma_n = CR_u\omega_0 = \frac{C}{C_u}$.

On définit de même une capacité unité : $C_u = \frac{1}{R_u\omega_0}$

4.2.2.3. Application : normaliser ce filtre



On prend $R_c = 50\Omega$ et $R_1 = 50\Omega$, $L_1 = 20\mu H$ et $C_1 = 1nF$

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cong 7,07 \cdot 10^6 \text{ rad/s} \quad \text{soit } f_0 \cong 1,125 \text{ MHz}$$

$$L_u = \frac{R_u}{\omega_0} = R_u \sqrt{LC} \cong 7,07 \mu H$$

$$\rightarrow \lambda_n = \frac{L_n}{L_u} \cong 2,83$$

$$C_u = \frac{1}{R_u \omega_0} = \frac{\sqrt{LC}}{R_u} \cong 2,83 nF$$

$$\rightarrow \gamma_n = \frac{C_n}{C_u} \cong 0,35$$

$$\text{Vérification : } \prod_{n=1}^{\infty} \gamma_n \lambda_n = 1$$

$$\text{Complément : Quand } R_1 = R_u \text{ le facteur de surtension } Q = \lambda_n = \frac{1}{\gamma_n}$$

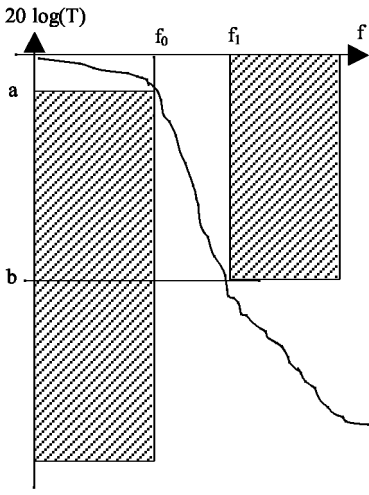
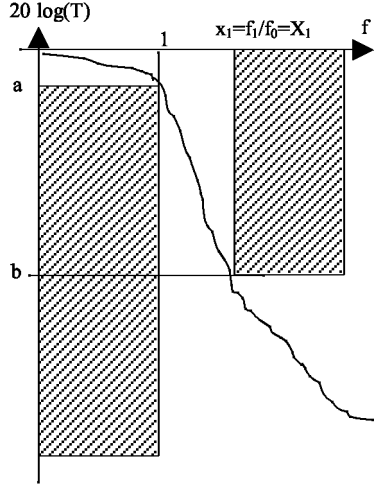
4.2.2.4. Universalité du filtre passe bas

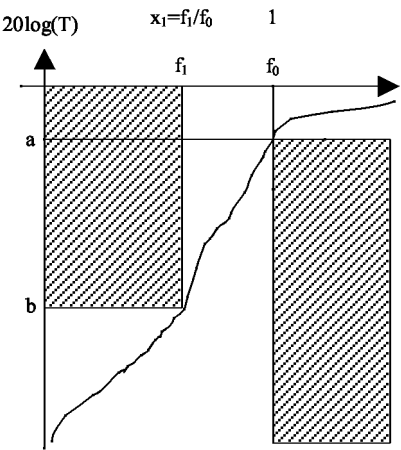
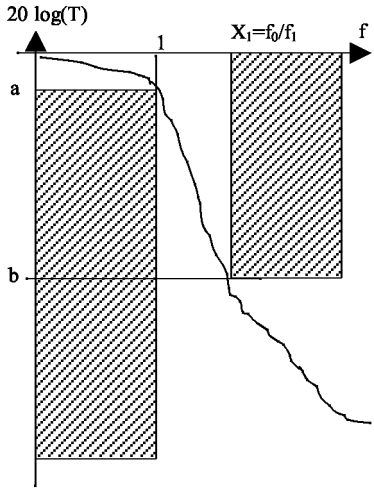
L'objectif de la normalisation d'un filtre est de ramener l'étude de tout les types de filtres (passe bas, passe haut, passe bande, coupe bande) à l'étude d'un filtre passe bas afin de faciliter les calculs.

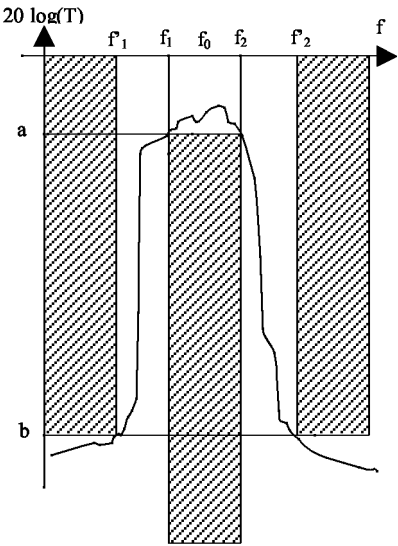
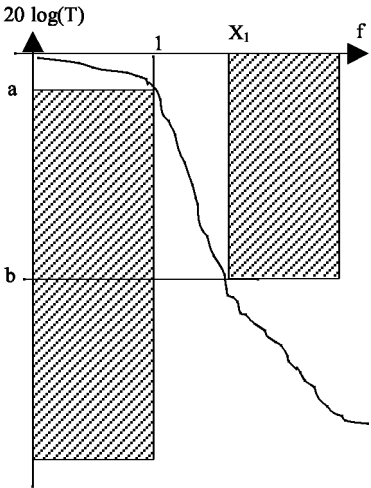
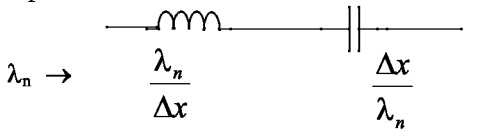
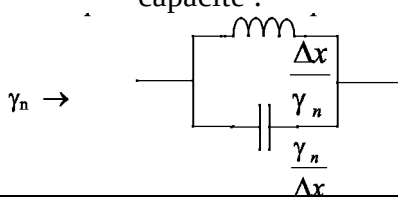
C'est une simplification considérable qui justifie à elle seule que l'on recherche à représenter les spécifications d'un filtre par un gabarit simplifié symétrique.

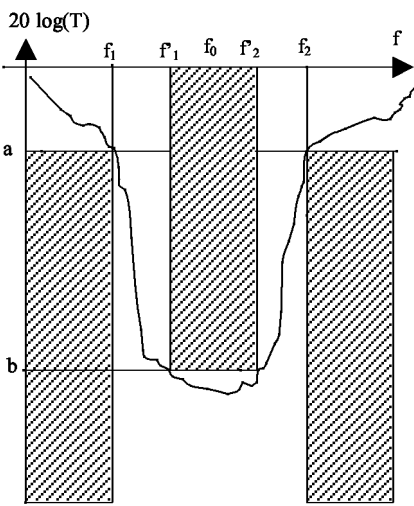
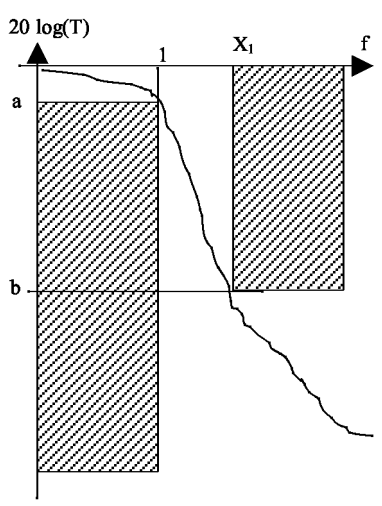
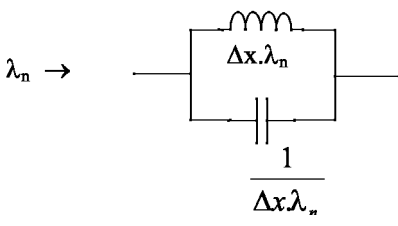
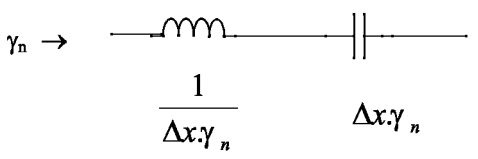
En effet, ces transformations s'appliquent aussi bien aux gabarits qu'aux fonctions de transfert et aux impédances. (on peut vérifier qu'elle ne modifie pas la sélectivité)

La normalisation se fait comme définie dans le tableau ci après :

Type de filtre	Gabarit réel	Normalisation
Passe bas		 <u>Normalisation des fréquences :</u> $\underline{s} = j \frac{f}{f_0} = j \frac{\omega}{\omega_0}$ On définit la pulsation normalisée : $x = \underline{s} = \frac{\omega}{\omega_0}$ <u>Normalisation des composants :</u> - Soit R_c la résistance de charge du filtre. - On définit les résistances normalisées (<i>uniquement pour les circuits passifs</i>) : $R_n = \frac{R}{R_c}$ <u>Inductance et capacité unité :</u> (<i>uniquement pour les circuits passifs</i>) Le changement de variable précédent impose des valeurs pour : l'inductance unité : $L_u = \frac{R_c}{\omega_0}$ la capacité unité : $C_u = \frac{1}{R_c \cdot \omega_0}$ - <u>Inductance normalisée :</u> $\lambda_n = \frac{L}{L_u}$ - <u>Capacité normalisée :</u> $\gamma_n = \frac{C}{C_u}$

Type de filtre	Gabarit réel	Normalisation
Passe haut		 Pulsation normalisée : $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ Transformation : $s \rightarrow S = 1/s$ $x \rightarrow X = 1/x$ La résistance normalisée est R_n : $R_n = \frac{R}{R_c}$ Les inductances vont se transformer en capacités, ainsi : $\text{---} \text{---} \text{---} \lambda_n \rightarrow \frac{1}{\lambda_n} \text{---} \text{---} \text{---}$ Les capacités vont se transformer en inductances, ainsi : $\text{---} \text{---} \gamma_n \rightarrow \frac{1}{\gamma_n} \text{---} \text{---} \text{---}$

Type de filtre	Gabarit réel	Normalisation
Passe bande	 Le gabarit est symétrique (au sens des logarithmes) par rapport à f_0 ainsi : $f_0 = \sqrt{f_1 \cdot f_2} = \sqrt{f'_1 \cdot f'_2}$ Si elle n'est pas symétrique, on prend la contrainte la plus forte.	 On définit X_1 comme : $X_1 = \frac{ f'^2_1 - f_0^2 }{f'_1 \cdot (f_2 - f_1)} = \frac{ f'^2_2 - f_0^2 }{f'_2 \cdot (f_2 - f_1)}$ On définit Δx (largeur de bande relative) et k (sélectivité) : $\Delta x = \frac{f_2 - f_1}{f_0}$ $k = \frac{f_2 - f_1}{f'_2 - f'_1}$ Transformation : $s \rightarrow S = \frac{1}{\Delta x} \left(s + \frac{1}{s} \right)$ $x \rightarrow X = \frac{1}{\Delta x} \left x - \frac{1}{x} \right = \frac{ f^2 - f_0^2 }{f \cdot (f_2 - f_1)}$ Cette transformation implique que : L'inductance va être changée par une capacité en série avec une inductance :  La capacité va être changée par une inductance en parallèle avec une capacité : 

Type de filtre	Gabarit réel	Normalisation
Coupe bande	 Le gabarit est symétrique (au sens des logarithmes) par rapport à f_0 ainsi : $f_0 = \sqrt{f_1 \cdot f_2} = \sqrt{f'_1 \cdot f'_2}$	 On définit X_1 comme : $X_1 = \frac{f'_2 - f'_1}{f_2 - f_1}$ On définit Δx : $\Delta x = \frac{f'_2 - f'_1}{f_0}$ Transformation : $s \rightarrow S = \frac{\Delta x}{s + \frac{1}{s}}$ $x \rightarrow X = \frac{\Delta x}{\left \frac{1}{x} - x \right } = \frac{f \cdot (f'_2 - f'_1)}{ f_0^2 - f^2 }$ Cette transformation implique que : L'inductance va être changée par une capacité en parallèle avec une inductance :  La capacité va être changée par une inductance en série avec une capacité 

4.2.3. Fonctions de transfert de filtres analytiques

Pour un gabarit passe bas donné, il existe une infinité de solutions. Lorsque l'on veut dimensionner un filtre, on ne sait calculer analytiquement qu'un petit nombre de fonctions caractéristiques convenant à la réalisation de ce gabarit.

Les différentes fonctions que l'on peut utiliser fixeront les propriétés physiques de notre filtre.

Les plus connus et utilisés sont les filtres polynomiaux : la fonction de transfert de ces filtres est un polynôme (du même ordre que l'ordre du filtre). Exemples : Butterworth, Chebycheff, Legendre, Bessel.

La fonction de transfert sera de la forme :
$$H(p) = \frac{K}{(p - p_0)(p - p_1) \dots (p - p_n)}$$

Détermination de $H(p)$:

- Par calcul de pôles (ex : Butterworth)
- Par récurrence (ex : Chebycheff ou Bessel)

Ces filtres ne présentent pas de zéro de transmission à des fréquences finies (dans la bande passante nominale théorique du filtre).

Une autre forme de fonction de transfert, les filtres elliptiques. Ils présentent des zéros de transmission à des fréquences finies. Exemple : Cauer. Applications typiques : en RTC.

► Filtres de Butterworth

- ordre élevé si l'on veut une grande sélectivité (pb de réalisation)
- pas d'ondulation dans la bande passante
- temps de propagation de groupe # constant (déphasage quasi linéaire)

► Filtre de Tchebycheff

- ordre plus petit pour une grande sélectivité
- si l'ordre est n, il présente n ondulations dans la bande passante
- temps de propagation de groupe non constant (déphasage non linéaire)

► Filtre de Bessel

- coupure plus douce.
- temps de propagation de groupe constant (déphasage linéaire)
- minimisation des distorsions

► Filtre de Cauer

- Filtre à coupure maximale

4.2.3.1. Détermination d'une fonction de transfert de Butterworth

On cherche à obtenir une courbe dans la bande passante la plus plate possible : $H(p) = \frac{K}{D(p)}$.

$$D(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0$$

Rappel sur Laplace :

$$H(p) = \frac{K}{D(p)} = \frac{V_s(p)}{V_E(p)} \Rightarrow KV_E(p) = (p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0)V_s(p).$$

Et on rappelle que $TL \left[\frac{d^n x(t)}{dt^n} \right] = p^n X(p)$.

La courbe de gain sera maximale plate si on peut annuler le plus grand nombre de dérivées possibles. On arrive donc à :

$$D(p) = p^n + a_0$$

$$D(j\omega) = (j\omega)^n + a_0$$

$$|D(j\omega)|^2 = \omega^{2n} + a_0^2 \text{ on pose : } a_0 = \omega_0^n$$

$$|D(j\omega)|^2 = \omega^{2n} + \omega_0^{2n}$$

$$|D(j\omega)|^2 = \omega_0^{2n} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2n} \right) = \omega_0^{2n} (1 + x^{2n})$$

$$\text{Avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{\omega_0^{2n} (1 + x^{2n})}$$

$$\Rightarrow |H(jx)|^2 = \frac{K}{1 + x^{2n}} \quad \text{on pose } s = jx = j \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{p}{\omega_0} \text{ (variable de Laplace normalisée)}$$

$$|H(x)| = \frac{1}{\sqrt{1 + x^{2n}}} \quad \text{si } s = jx \text{ alors } x = -js$$

$$|H(s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (-js)^{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (-j)^{2n} s^{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (-1)^n s^{2n}}}$$

$$\text{Pour déterminer l'ordre du filtre : } n \geq \frac{\ln \left(10^{\frac{b}{10}} - 1 \right)}{2 \cdot \ln(X_1)}$$

Application : Butterworth d'ordre 3

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 - s^6}. \text{ Pôles } 1 - s^6 = 0 \Rightarrow s^6 = 1$$

On pose $s = e^{j\theta}$; donc on cherche $e^{j6\theta} = 1 = e^0$

Donc il faut : $6\theta = 0 + 2k\pi$ soit $\theta = \frac{2k\pi}{6} = \frac{k\pi}{3}$ pour $k \in [0;5]$

$p_0 :$	$k=0 \quad \theta=0$	$p_0 = \cos \theta + j \sin \theta$	$=1$
$p_1 :$	$k=1 \quad \theta=\frac{\pi}{3}$	$p_1 = \cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3}$	$= +\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}$
$p_2 :$	$k=2 \quad \theta=\frac{2\pi}{3}$	$p_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3}$	$= -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}$
$p_3 :$	$k=3 \quad \theta=\pi$	$p_3 = \cos \pi + j \sin \pi$	$= -1$
$p_4 :$	$k=4 \quad \theta=\frac{4\pi}{3}$	$p_4 = \cos \frac{4\pi}{3} + j \sin \frac{4\pi}{3}$	$= -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}$
$p_5 :$	$k=5 \quad \theta=\frac{5\pi}{3}$	$p_5 = \cos \frac{5\pi}{3} + j \sin \frac{5\pi}{3}$	$= +\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}$

On doit choisir 3 pôles parmi ces 6 (car on doit avoir un ordre 3). On prend les pôles à partie réelle négative.

D'où :

$$H(s) = \frac{1}{(s-p_3)(s-p_2)(s-p_4)} = \frac{1}{(s+1)\left(s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

On dénormalise : $s = j\omega = j \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{p}{\omega_0}$: $H(p) = \frac{\omega_0^3}{p^3 + 2p^2\omega_0 + 2p\omega_0^2 + \omega_0^3}$

$$|H(x)| = \frac{1}{\sqrt{1+x^{2n}}} \text{ pour } \omega = \omega_0, x=1, x^{2n}=1 \text{ et } |H(1)| = \frac{1}{\sqrt{2}} : \forall \text{ l'ordre, tous les Butterworth}$$

ont un gain de -3db à $\omega = \omega_0$.

On peut remarquer que quelque soit l'application, les filtres de Butterworth ont toujours la même caractéristique pour un ordre donné. Il suffit donc de faire le calcul une fois pour toute pour chaque ordre.

Fonctions de transmission $\underline{H}(s) = \underline{V}_1/\underline{V}_2$ des filtres de Butterworth d'ordre 1 à 9 :

$$\begin{aligned} P_1 &= s + 1 \\ P_2 &= s^2 + \sqrt{2}s + 1 \\ P_3 &= s^3 + 2s^2 + 2s + 1 \\ P_4 &= s^4 + 2,613s^3 + 3,414s^2 + 2,613s + 1 \\ P_5 &= s^5 + 3,236s^4 + 5,236s^3 + 5,236s^2 + 3,236s + 1 \\ P_6 &= s^6 + 3,863s^5 + 7,464s^4 + 9,141s^3 + 7,464s^2 + 3,863s + 1 \\ P_7 &= s^7 + 4,494s^6 + 10,098s^5 + 14,592s^4 + 14,592s^3 + 10,098s^2 + 4,494s + 1 \\ P_8 &= s^8 + 5,152s^7 + 13,137s^6 + 21,846s^5 + 25,688s^4 + 21,846s^3 + 13,137s^2 + 5,152s + 1 \\ P_9 &= s^9 + 5,759s^8 + 16,582s^7 + 31,163s^6 + 41,986s^5 + 41,986s^4 + 31,163s^3 + 16,582s^2 + 5,759s + 1 \end{aligned}$$

Remarque: on pourrait définir un filtre de Butterworth ayant un gain réglable dans le bande passante en posant $|H(x)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 x^{2n}}}$. Mais le table donné ci-dessus n'est donc plus valable que pour $\varepsilon = 1$.

4.2.3.2. Détermination d'une fonction de transfert de Chebycheff

Le but de ce filtre est d'avoir une meilleure approximation du filtre passe-bas idéal (coupure très violente).

La fonction de transfert est de la forme :

$$|H(jx)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n(x)^2}}$$

avec $0 < \varepsilon \leq 1$

$C_n(x)$ est obtenu par récurrence :

$$C_0(x) = 1$$

$$C_1(x) = x$$

$$C_n(x) = 2xC_{n-1}(x) - C_{n-2}(x)$$

Si $x = 1$: $C_0(x) = 1$, $C_1(x) = 1$, $C_2(x) = 2 \cdot 1 \cdot C_1 - C_0 = 1, \dots$, $C_n(x) = 1 \Rightarrow |H(1)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$

Donc selon ε la gain à $x = 1$ varie de 0 à -3db .

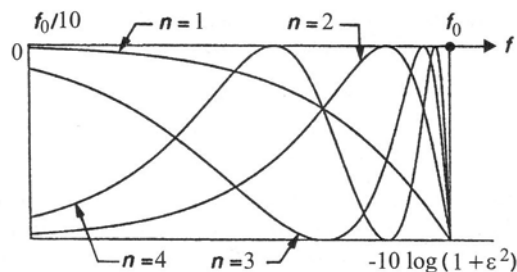
Pour déterminer les ondulations dans la bande passante ($0 \leq x \leq 1$) on fait un changement de variable $x = \cos \varphi$ car $\exists \varphi / x = \cos \varphi$.

$$C_0(x) = 1$$

$$C_1(x) = \cos \varphi$$

$$C_n(x) = \cos n\varphi$$

Après l'étude de ces fonctions, on arrive à la conclusion suivante : l'ordre du filtre est égal au nombre de contact à tangente nulle (exclu $x = 1$) dans la bande d'ondulation (bande passante).



$$\arg ch \left(\sqrt{\frac{10^{\frac{b}{10}} - 1}{10^{\frac{a}{10}} - 1}} \right)$$

Pour déterminer l'ordre du filtre : $n \geq \frac{\arg ch(X_1)}{\arg ch(X_1)}$

Détermination de la fonction de transfert $|H(jx)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n(x)^2}}$

1. on fixe ε (en fixant la bande d'ondulation)

2. on détermine $C_n(x)$

3. on résout $1 + \varepsilon^2 C_n(x)^2 = 0$

Pour fixer ε : si $|H(1)|_{\text{db}} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} = -a_{\text{db}}$ ($0 < a < 3$) alors $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{a}{10}} - 1}$

Exemple d'une fonction de transfert d'ordre 3 avec une ondulation à -1db :

On a montré que pour $x=1$ alors $C_n(x)=1$ et donc $|H(1)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$. En décibel cela nous

$$\text{donne } |H(1)|_{\text{db}} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = -1\text{db} \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{10^{\frac{1}{10}} - 1} \approx 0,509$$

$$C_0(x) = 1$$

$$C_1(x) = x$$

$$C_2(x) = 2xC_1(x) - C_0(x) = 2x \cdot x - 1 = 2x^2 - 1$$

$$C_3(x) = 2xC_2(x) - C_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$$

$$1 + \varepsilon^2 C_n(x)^2 = 0 \Rightarrow 1 + 0,509^2 \cdot (4x^3 - 3x)^2 = 0$$

$$1 + 0,509^2 \cdot (16x^6 - 24x^4 + 9x^2) = 0$$

$$4,072x^6 - 6,108x^4 + 2,2905x^2 + 1 = 0 = P(x)$$

On note notre polynôme $P(x)$

On obtient les 6 racines suivantes : $\{(\pm j 0,494); (0,966 \pm j 0,247); (-0,966 \pm j 0,247)\}$. Elles les racines complexes sont toujours accompagnées de leur conjugué car le polynôme de départ en réel. Ainsi :

$$P(x) = (x - j 0,494)(x + j 0,494)$$

$$(x + 0,966 - j 0,247)(x + 0,966 + j 0,247)(x - 0,966 - j 0,247)(x - 0,966 + j 0,247)$$

$$P(x) = [x^2 + (0,494)^2] [(x - 0,966)^2 + (0,247)^2] [(x + 0,966)^2 + (0,247)^2]$$

$P(x)$ est le module au carré de polynôme en $\underline{s} = jx$. Cherchons à obtenir les termes « jx »

$$P(\underline{s}) = [jx + 0,494][j(x - 0,966) + 0,247][j(x + 0,966) + 0,247]$$

$$P(\underline{s}) = [jx + 0,494][jx - j0,966 + 0,247][jx + j0,966 + 0,247]$$

$$P(\underline{s}) = [jx + 0,494][jx + 0,247 - j0,966][jx + 0,247 + j0,966]$$

$$P(\underline{s}) = [jx + 0,494][(jx + 0,247)^2 + (0,966)^2]$$

Sachant que $\underline{s} = jx$ il vient :

$$P(\underline{s}) = [\underline{s} + 0,494][(\underline{s} + 0,247)^2 + (0,966)^2]$$

$$P(\underline{s}) = [\underline{s} + 0,494][\underline{s}^2 + 0,494\underline{s} + (0,247)^2 + (0,966)^2]$$

$$P(\underline{s}) = (\underline{s} + 0,494)(\underline{s}^2 + 0,494\underline{s} + 0,994)$$

$$P(\underline{s}) = \underline{s}^3 + 0,494\underline{s}^2 + 0,994\underline{s} + 0,494\underline{s}^2 + 0,224\underline{s} + 0,491$$

$$P(\underline{s}) = \underline{s}^3 + 0,988\underline{s}^2 + 1,238\underline{s} + 0,491$$

Voilà notre polynôme caractéristique $P(\underline{s})$

Pour vérifier dans les table, on divise par 0,491 pour obtenir le terme d'ordre 0 en « +1 »

$$\frac{P(\underline{s})}{0,491} = 2,0367\underline{s}^3 + 2,012\underline{s}^2 + 2,521\underline{s} + 1$$

Pour un filtre de Tchebycheff, le polynôme du dénominateur ne dépend pas que de l'ordre du filtre mais aussi de ε , ce qui donne une infinité de solution. Il faudra donc refaire le calcul pour chaque application, ou bien prendre une valeur plus petite que le ε nécessaire à l'application. On donne ci-dessous les polynômes pour trois valeurs de ε .

Fonctions de transmission $\underline{H}(s) = \underline{V}_1/\underline{V}_2$ des filtres de Tchebycheff d'ordre 2 à 7 :

$$A_{\max} = 0,1dB \quad \varepsilon = 0,15262$$

$$P_2 = 0,3017s^2 + 0,7158s + 1$$

$$P_3 = 0,6105s^3 + 1,1836s^2 + 1,6052s + 1$$

$$P_4 = 1,2069s^4 + 2,1771s^3 + 3,1705s^2 + 2,4447s + 1$$

$$P_5 = 2,4419s^5 + 4,2586s^4 + 6,7658s^3 + 5,8531s^2 + 3,5055s + 1$$

$$P_6 = 4,8279s^6 + 8,2662s^5 + 14,32s^4 + 13,42s^3 + 9,8868s^2 + 4,3536s + 1$$

$$P_7 = 9,7677s^7 + 16,538s^6 + 31,095s^5 + 30,956s^4 + 26,423s^3 + 14,484s^2 + 5,487s + 1$$

$$A_{\max} = 0,5dB \quad \varepsilon = 0,34931$$

$$P_2 = 0,6595s^2 + 0,9402s + 1$$

$$P_3 = 1,3975s^3 + 1,7506s^2 + 2,1446s + 1$$

$$P_4 = 2,6381s^4 + 3,1589s^3 + 4,5293s^2 + 2,7053s + 1$$

$$P_5 = 5,589s^5 + 6,553s^4 + 10,38s^3 + 7,319s^2 + 4,2058s + 1$$

$$P_6 = 10,552s^6 + 12,232s^5 + 22,918s^4 + 16,776s^3 + 12,366s^2 + 4,563s + 1$$

$$P_7 = 22,355s^7 + 25,736s^6 + 53,937s^5 + 41,792s^4 + 36,84s^3 + 16,89s^2 + 6,306s + 1$$

$$A_{\max} = 1dB \quad \varepsilon = 0,50884$$

$$P_2 = 0,907s^2 + 0,9957s + 1$$

$$P_3 = 2,0353s^3 + 2,0116s^2 + 2,5206s + 1$$

$$P_4 = 3,628s^4 + 3,4568s^3 + 5,2749s^2 + 2,6942s + 1$$

$$P_5 = 8,1415s^5 + 7,6271s^4 + 13,75s^3 + 7,933s^2 + 4,7264s + 1$$

$$P_6 = 14,512s^6 + 13,47s^5 + 28,02s^4 + 17,445s^3 + 13,632s^2 + 4,456s + 1$$

$$P_7 = 32,566s^7 + 30,06s^6 + 70,866s^5 + 46,53s^4 + 44,21s^3 + 17,866s^2 + 6,9584s + 1$$

Comportement harmonique :

- pente inférieure à la pente asymptotique d'un filtre du même ordre en $x = 1$
- très mauvais comportement en signaux sinusoïdaux (temps de groupe non constant)

Comportement impulsionnel : fort dépassement.

On l'emploie souvent à fréquence fixe.

4.2.3.3. Détermination d'une fonction de transfert de Bessel

Son principal avantage est sa phase qui est linéaire : pas de déformation pour les signaux non sinusoïdaux.

Forme du filtre : $H(p) = e^{-t_0 p}$

Pour déterminer le $H(s)$ (ou $H(p)$) à utiliser, on fait un développement limité de $\cosh(s)$ (transformation de e^s) puis une division polynomial.

Une autre méthode plus simple et plus rapide est d'utiliser la relation de récurrence.

$$\begin{aligned}B_0(s) &= 1 \\B_1(s) &= 1 + s \\B_n(s) &= (2n-1)B_{n-1}(s) - s^2 B_{n-2}(s)\end{aligned}$$

Comme pour Butterworth, on peut remarquer que quelque soit l'application, les filtres de Bessel ont toujours la même caractéristique pour un ordre donné. Il suffit donc de faire le calcul une fois pour toute pour chaque ordre.

Fonctions de transmission $\underline{H}(s) = \underline{V}_1 / \underline{V}_2$ des filtres de Bessel d'ordre 1 à 8 :

$$\begin{aligned}P_1 &= s + 1 \\P_2 &= s^2 + 3s + 3 \\P_3 &= s^3 + 6s^2 + 15s + 15 \\P_4 &= s^4 + 10s^3 + 45s^2 + 105s + 105 \\P_5 &= s^5 + 15s^4 + 105s^3 + 420s^2 + 945s + 945 \\P_6 &= s^6 + 21s^5 + 210s^4 + 1260s^3 + 4725s^2 + 10395s + 10395 \\P_7 &= s^7 + 28s^6 + 378s^5 + 3150s^4 + 17325s^3 + 62370s^2 + 135135s + 135135 \\P_8 &= s^8 + 36s^7 + 630s^6 + 6930s^5 + 51975s^4 + 270270s^3 + 945945s^2 + 2027025s + 2027025 \\P_9 &= s^9 + 45s^8 + 990s^7 + 13860s^6 + 135135s^5 + 945945s^4 + 4729726s^3 + 16216202s^2 + 34459432s + 34459432 \\P_n &= (2n-1)P_{n-1} + s^2 P_{n-2}\end{aligned}$$

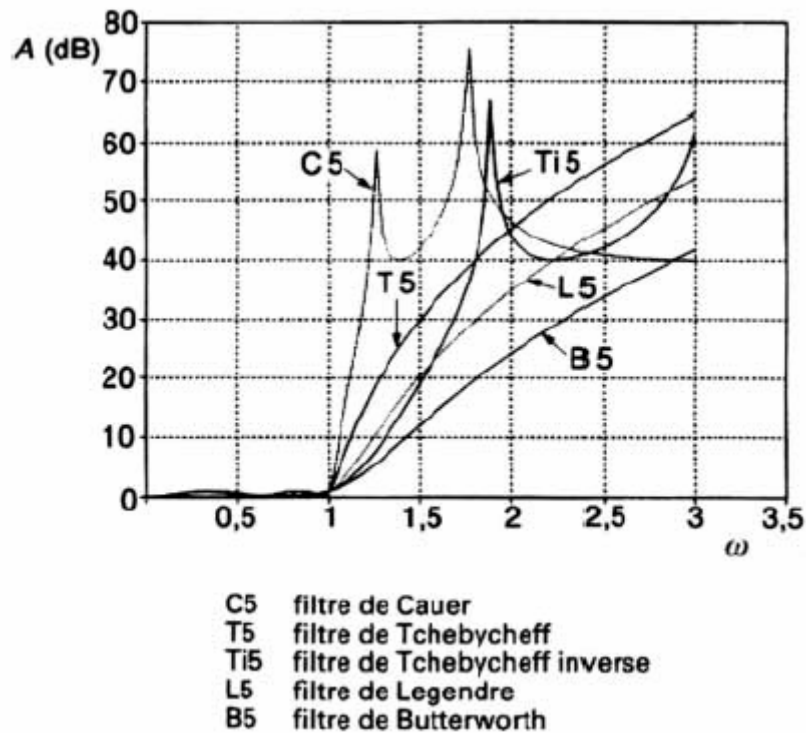
Comportement harmonique :

- peu de distorsion en non-sinus
- moins efficace qu'un Butterworth dans la bande atténuée

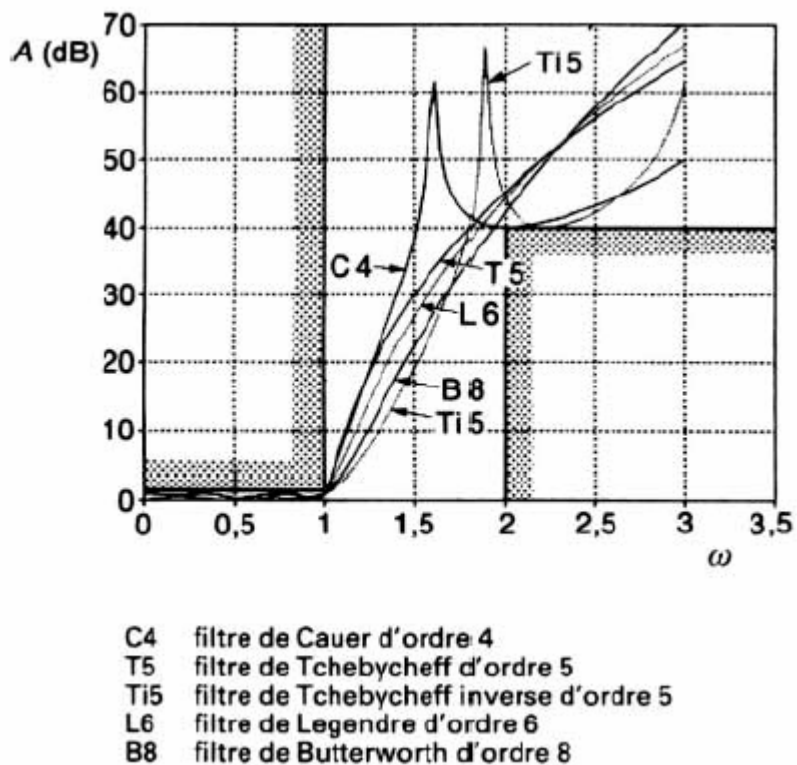
Comportement impulsionnel : très bon comportement

4.2.3.4. Comparaison des réponses de plusieurs types de filtre

La figure suivante représente les affaiblissements en bande atténuée et en bande passante de cinq filtres analytiques d'ordre 5, avec $A_{\min} = 40$ dB et $A_{\max} = 1$ dB.



La figure suivante représente les affaiblissements de ces mêmes types de filtres en choisissant leur ordre n de façon à respecter le même gabarit d'affaiblissement : $A_{\max} = 1$ dB, $A_{\min} = 40$ dB, $1/k = 2$.

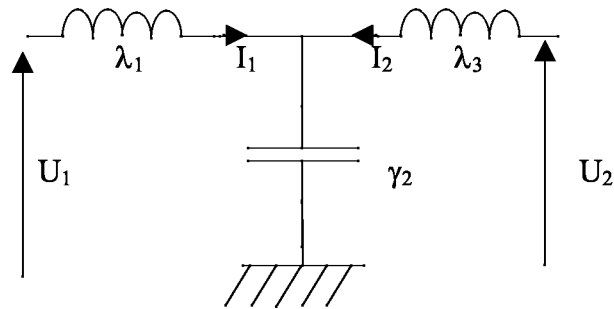


4.2.4. Déterminations des éléments du filtre passe-bas universel

Une fois déterminé $H(s)$ répondant aux caractéristiques, il faut maintenant déterminer les éléments qui vont constituer la structure de ce filtre passe-bas « universel » (transformé de notre filtre d'application vers ce filtre passe-bas).

Il existe plusieurs structures de filtre passif, nous n'étudierons et n'utiliserons que les filtres en structure en T.

4.2.4.1. Structure en T et matrice admittance



On détermine alors le paramètre admittance $Y_{22} = (I_2/U_2)$ pour $U_1=0$.

On rappelle que la matrice admittance (quadripôle équivalent du filtre) est de la forme :

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Pour un filtre passif, on a toujours : $Y_{12} = Y_{21}$

On va charger notre filtre avec l'impédance caractéristique R_0 (donc 1 puisque nous sommes

sur une structure normalisée) et on arrive ainsi à $\underline{V}_2(s) = -\underline{I}_2(s) \Rightarrow \frac{\underline{V}_2(s)}{\underline{V}_1(s)} = -\frac{\underline{Y}_{21}}{1 + \underline{Y}_{22}}$

On montre que pour $\underline{H}(s) = \frac{\underline{V}_2(s)}{\underline{V}_1(s)} = \frac{1}{(s - p_0)(s - p_1) \dots (s - p_n)} = \frac{1}{N(s^2) + s \cdot D(s^2)}$

avec $N(s^2)$: polynôme regroupant toutes les puissances paires et $s \cdot D(s^2)$ polynôme regroupant toutes les puissances impaires de $(s - p_0)(s - p_1) \dots (s - p_n)$:

- $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -\frac{1}{s \cdot D(s^2)}$ et
- $\underline{Y}_{22} = \frac{N(s^2)}{s \cdot D(s^2)}$

4.2.4.2. Utilisation

A partir de la fonction de transfert du filtre $\underline{H}(s) = \frac{\underline{V}_2(s)}{\underline{V}_1(s)} = \frac{1}{(s - p_0)(s - p_1) \dots (s - p_n)}$ on sépare les puissances paires et impaires et on détermine ainsi $\underline{Y}_{22}$. Par divisions polynomiales on peut déterminer toutes les éléments de notre filtre de structure en « T ».

On va distinguer 2 cas possibles : le cas où l'ordre du filtre est pair ou s'il est impair.

4.2.4.2.1. Filtres d'ordre pair

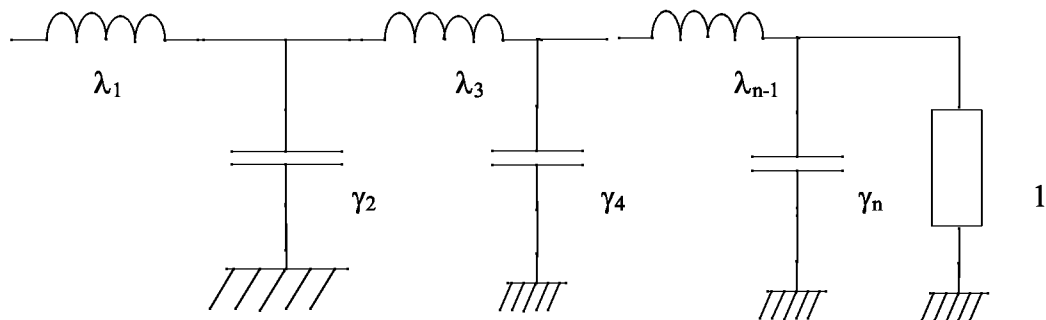
Dans le cas d'un filtre d'ordre pair, Y_{22} est formée par un quotient de polynômes qui est le rapport entre le polynôme formé à partir de la fonction de transmission d'exposant pair divisé par le polynôme formé à partir de la fonction de transmission d'exposant impair.

$$Y_{22} = \frac{\text{polynôme formé à partir de la fonction de transmission d'exposant pair}}{\text{polynôme formé à partir de la fonction de transmission d'exposant impair}}$$

En effectuant, les divisions successives de polynômes il vient :

$$Y_{22}(s) = \gamma_n s + \frac{1}{\lambda_{n-1}s + \frac{1}{\gamma_{n-2}s + \frac{1}{\dots \lambda_3 s + \frac{1}{\gamma_2 s + \frac{1}{\lambda_1 s}}}}}$$

Le filtre normalisé devient ainsi :



4.2.4.2.2. Filtres d'ordre impair

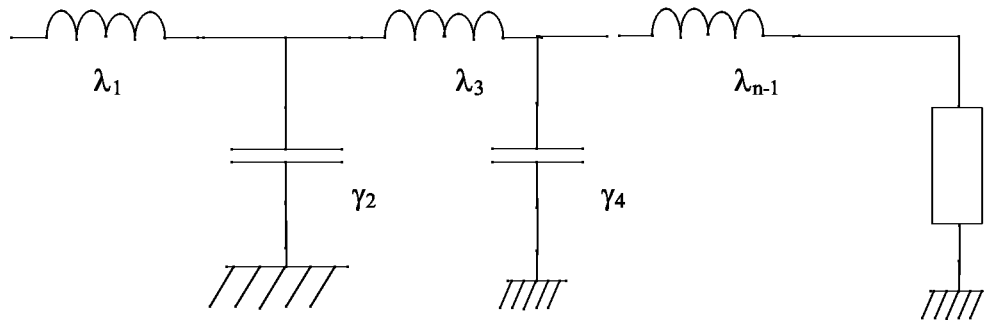
Dans le cas d'un filtre d'ordre impair, Y_{22} est formée par un quotient de polynômes qui est le rapport entre le polynôme formé à partir de la fonction de transmission d'exposant pair divisé par le polynôme formé à partir de la fonction de transmission d'exposant impair.

$$Y_{22} = \frac{\text{polynôme formé à partir de la fonction de transmission d'exposant pair}}{\text{polynôme formé à partir de la fonction de transmission d'exposant impair}}$$

En effectuant, les divisions successives de polynômes il vient :

$$Y_{22}(s) = \frac{1}{\lambda_{n-1}s + \frac{1}{\gamma_{n-2}s + \frac{1}{\dots \lambda_3 s + \frac{1}{\gamma_2 s + \frac{1}{\lambda_1 s}}}}}$$

or comme l'ordre du polynôme d'exposant impair est supérieur à celui de l'exposant pair, il vient que $\gamma_n = 0$. Le filtre normalisé devient ainsi :



4.2.4.3. Récapitulatif

Les calculs précédents étant toujours identiques, il est possible de définir des abaques ou toutes les valeurs des γ et λ sont donnés pour un certain type de réponse de filtre. Ici, nous donnons le tableau récapitulatif des filtres de Butterworth jusqu'à l'ordre 5.

Ordre	Polynôme en s	Y_{22} décomposé	Filtre normalisé
1	$s + 1$	$\frac{1}{s}$	
2	$s^2 + \sqrt{2}s + 1$	$0,707s + \frac{1}{1,414s}$	
3	$s^3 + 2s^2 + 2s + 1$	$\frac{1}{0,5s + \frac{1}{1,333s + \frac{1}{1,5s}}}$	
4	$s^4 + 2,613s^3 + 3,414s^2 + 2,613s + 1$	$0,383s + \frac{1}{1,082s + \frac{1}{1,577s + \frac{1}{1,531s}}}$	
5	$s^5 + 3,236s^4 + 5,236s^3 + 5,236s^2 + 3,236s + 1$	$\frac{1}{0,309s + \frac{1}{0,894s + \frac{1}{1,381s + \frac{1}{1,694s + \frac{1}{1,546s}}}}}$	

4.2.5. Dénormalisation

Il faut dans un premier temps remplacer les λ_n et les γ_n du filtre normalisé passe bas par les λ_n et les γ_n du filtre normalisé considéré, ainsi un λ_n du filtre normalisé passe bas devient pour un filtre passe bande une inductance de valeur $(\lambda_n/\Delta x)$ en série avec une capacité de valeur $(\Delta x/\lambda_n)$, il faut en faire de même pour les capacités,...

Une fois le filtre normalisé considéré réalisé, il faut remplacer les valeurs de λ_n et γ_n par leurs valeurs réelles qui sont respectivement : $L_n = L_u \cdot \lambda_n$ et $C_n = C_u \cdot \gamma_n$

4.3. Filtres actif

L'inconvénient d'un filtre actif est qu'il faut l'alimenter et se contenter de signaux d'amplitude limitée par les AIL. Le niveau de bruit et la présence de tension d'offset peuvent aussi limiter les domaines d'applications.

Son avantage réside sur la possibilité de cascader plusieurs cellules élémentaires en n'ayant pas le même problème de charge qu'un filtre passif (avec un filtre actif, R_e est élevé et R_s faible). On peut ainsi former un filtre d'un gabarit plus complexe.

Comme pour les filtres passifs, il existe différent type de structure. Citons par exemple, les structures à quadripôles et amplificateur opérationnel, les structures de Rauch, les structures de Sallen et Key, les structures à girateur, à impédance négative et à variable d'état,...

4.3.1. Dénormalisation

Contrairement aux filtres passifs, la fonction de transfert des filtres actifs est indépendante de ce que l'on connecte à ces filtres. Ainsi, la réalisation des filtres se fait en cascade de cellules indépendantes du premier ou du second ordre.

Après avoir obtenu, la fonction de transfert équivalente passe bas normalisé, il suffit de remplacer la variable de Laplace normalisée 's' ou 'p' par le changement de variable décrit dans le tableau n°1, en faisant attention que la valeur de remplacement est normé et que 's' ou 'p' représente

$$\frac{s}{\omega_0} = \frac{p}{\omega_0} = \frac{j\omega}{\omega_0}$$

Par exemple pour un passe bande, il faut changer 'p' par :

$$\frac{1}{\Delta x} \left(p + \frac{1}{p} \right) = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{j\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{j\omega} \right) \quad \text{ou } \omega = 2\pi f$$

Une fois ces changements de variables effectués, il suffit de factoriser les polynômes en polynômes de premier ou de second ordre.

Exemple sur les polynôme de Butterworth :

Ordre n	Cellule	Décomposition de $\underline{H}(s) = \underline{V}_1/\underline{V}_2$
2	1	$s^2 + 1,414\,2\,s + 1$
3	1 2	$s^2 + 1,000\,0\,s + 1$ $s + 1$
4	1 2	$s^2 + 1,847\,7\,s + 1$ $s^2 + 0,765\,3\,s + 1$
5	1 2 3	$s^2 + 1,618\,0\,s + 1$ $s^2 + 0,618\,0\,s + 1$ $s + 1$
6	1 2 3	$s^2 + 1,931\,8\,s + 1$ $s^2 + 1,414\,2\,s + 1$ $s^2 + 0,517\,6\,s + 1$
7	1 2 3 4	$s^2 + 1,801\,9\,s + 1$ $s^2 + 1,246\,9\,s + 1$ $s^2 + 0,445\,0\,s + 1$ $s + 1$
8	1 2 3 4	$s^2 + 1,961\,5\,s + 1$ $s^2 + 1,662\,9\,s + 1$ $s^2 + 1,111\,1\,s + 1$ $s^2 + 0,390\,1\,s + 1$
9	1 2 3 4 5	$s^2 + 1,879\,3\,s + 1$ $s^2 + 1,532\,0\,s + 1$ $s^2 + 1,000\,0\,s + 1$ $s^2 + 0,347\,2\,s + 1$ $s + 1$

4.3.2. Structure du premier ordre

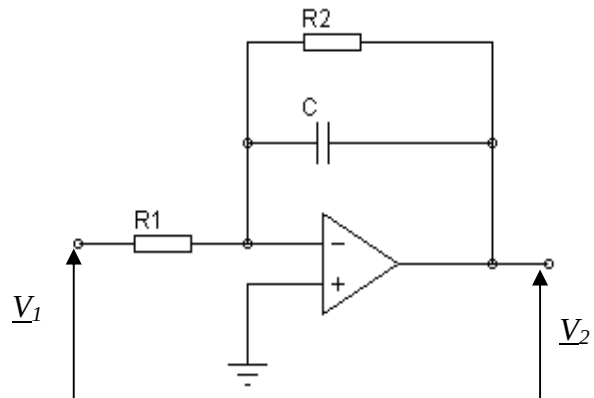
4.3.2.1. Passe-bas inverseur

$$\frac{V_2}{V_1} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + jR_2C\omega}$$

qui est bien de la forme :

$$\underline{T} = A \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}},$$

avec $A = -\frac{R_2}{R_1}$ et $\omega_c = \frac{1}{R_2C}$



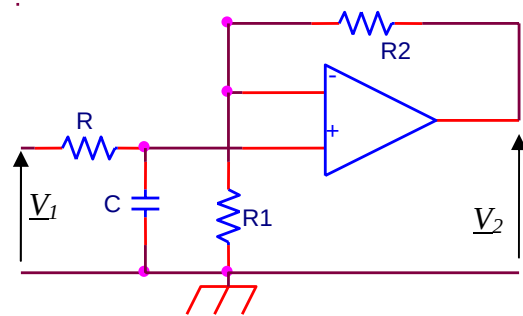
4.3.2.2. Passe-bas non inverseur

$$\underline{T} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \times \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

qui est bien de la forme :

$$\underline{T} = A \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}},$$

avec $A = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$ et $\omega_c = \frac{1}{RC}$



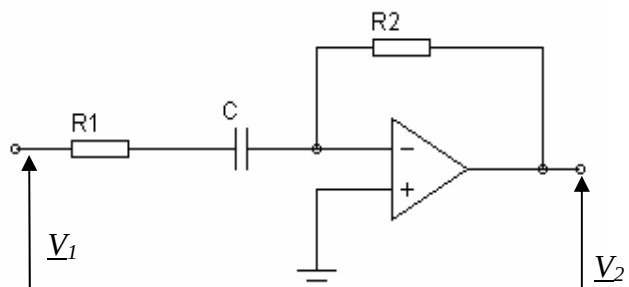
4.3.2.3. Passe-haut

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{jR_1C\omega}{1 + jR_1C\omega}$$

qui est bien de la forme :

$$\underline{T} = A \frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

avec $A = -\frac{R_2}{R_1}$ et $\omega_c = \frac{1}{R_1C}$



4.3.3. Structure du deuxième ordre

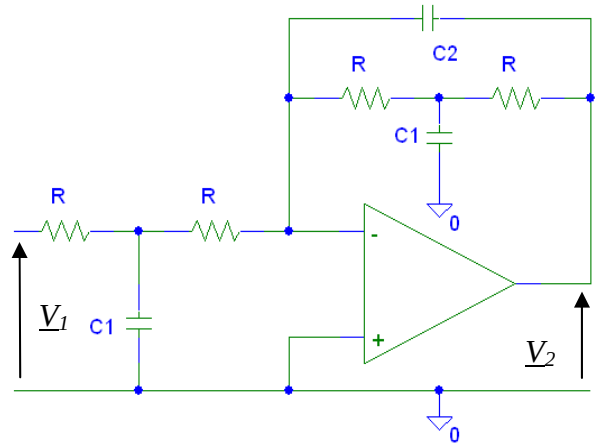
4.3.3.1. Passe-bas

$$\frac{V_s}{V_e} = - \frac{1}{1 + 2jRC_2\omega + (jR\sqrt{C_1C_2}\omega)^2}$$

qui est bien de la forme :

$$\underline{T} = \frac{A}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

avec $A = -1$ et $\omega_c = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}$ et $m = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$



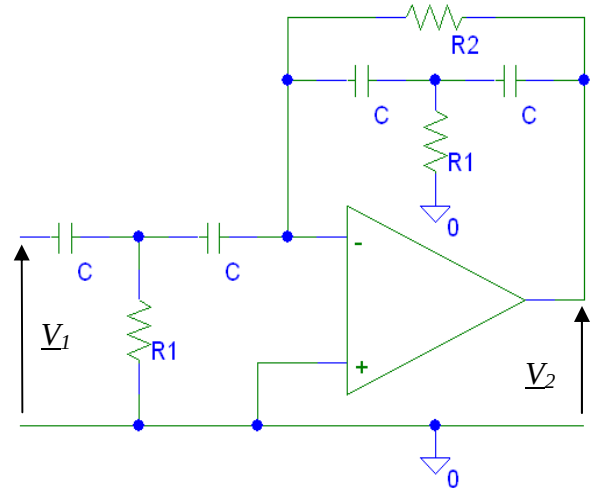
4.3.3.2. Passe-haut

$$\frac{V_s}{V_e} = - \frac{1}{1 + 2jCR_1\omega + (jC\sqrt{R_1R_2}\omega)^2}$$

qui est bien de la forme :

$$\underline{T} = A \cdot \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

avec $A = -1$ et $\omega_c = \frac{1}{C\sqrt{R_1R_2}}$ et $m = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$



4.3.3.3. Passe-bande

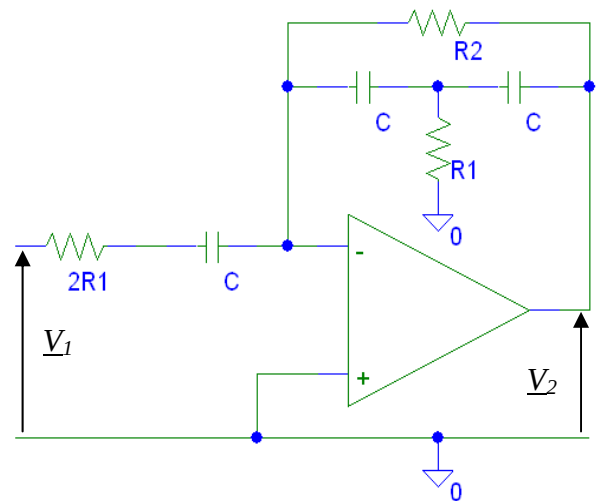
$$\frac{V_s}{V_e} = - \frac{jCR_2\omega}{1 + 2jCR_1\omega + (jC\sqrt{R_1R_2}\omega)^2}$$

qui est bien de la forme :

$$\underline{T} = A \cdot \frac{2mj\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

avec $A = -\frac{R_2}{2R_1}$ et $\omega_c = \frac{1}{C\sqrt{R_1R_2}}$ et

$$m = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$$



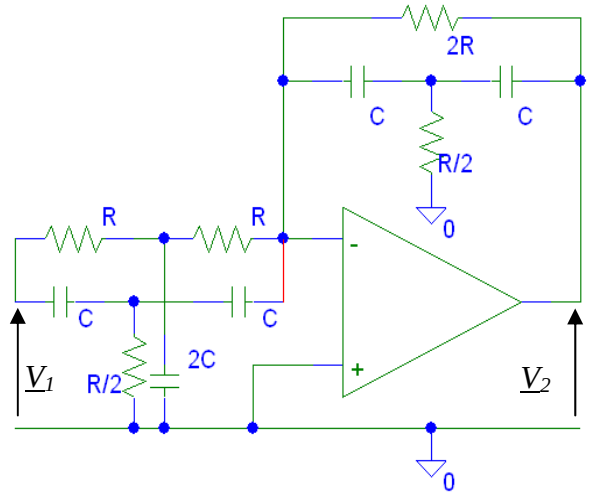
4.3.3.4. Réjecteur

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{(1 + jCR\omega)^2}{1 + jCR\omega + (jCR\omega)^2}$$

qui est bien de la forme :

$$\underline{T} = A \cdot \frac{1 + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

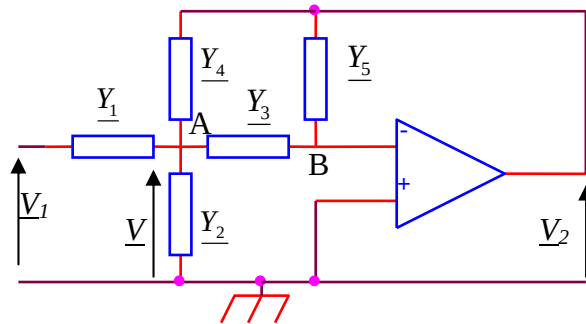
avec $A = -1$ et $\omega_c = \frac{1}{CR}$ et $m = 0,5$



4.3.3.5. Structure de Rauch

La structure de Rauch permet de réaliser tout les types de filtres (passe bas, passe haut, passe bande) hormis les filtres réjecteur de bande (coupe bande).

Cette famille de filtres est décrite par le schéma de la figure suivante sur lequel $\underline{Y}_1$, $\underline{Y}_2$, $\underline{Y}_3$, $\underline{Y}_4$ et $\underline{Y}_5$ sont des admittances.



La formule de Millman, appliquée aux points A et B, conduit aux équations

$$\begin{cases} \underline{V}_A = \frac{\underline{Y}_1 \underline{V}_1 + \underline{Y}_3 \underline{V}_B + \underline{Y}_4 \underline{V}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4} = \frac{\underline{Y}_1 \underline{V}_1 + \underline{Y}_4 \underline{V}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4} \quad \text{puisque } \underline{V}_B = 0 \\ \underline{V}_B = 0 = \frac{\underline{Y}_3 \underline{V}_A + \underline{Y}_5 \underline{V}_2}{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_5} \Rightarrow \underline{Y}_3 \underline{V}_A = -\underline{Y}_5 \underline{V}_2 \end{cases}$$

Par élimination de $\underline{V}_A$ il vient :

$$\underline{T} = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = -\frac{\underline{Y}_1 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_3 \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4)}$$

Les admittances $\underline{Y}_1$, $\underline{Y}_2$, $\underline{Y}_3$, $\underline{Y}_4$ et $\underline{Y}_5$ sont réalisées par des résistances ($\underline{Y} = \frac{1}{R}$) ou par des condensateurs ($\underline{Y} = jC\omega$).

4.3.3.5.1. Structure passe-bas de Rauch

On désire obtenir une fonction de transfert de la forme:

$$\underline{T} = \frac{A}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_c} + \left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

Le numérateur doit être réel, on va donc prendre $\underline{Y}_1$ et $\underline{Y}_3$ réel.

Au dénominateur, $\underline{Y}_3\underline{Y}_4$, $\underline{Y}_5\underline{Y}_1$ et $\underline{Y}_5\underline{Y}_3$ peuvent être réels ou complexes. Il ne reste que $\underline{Y}_5\underline{Y}_2$ et $\underline{Y}_5\underline{Y}_4$ pour obtenir le terme en $\left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2$. Nous arrivons donc à prendre obligatoirement $\underline{Y}_5$ complexe. Comme nous devons avoir un terme réel au dénominateur, il ne reste comme solution que $\underline{Y}_4$ réel pour avoir $\underline{Y}_3\underline{Y}_4$ réel. C'est donc $\underline{Y}_5\underline{Y}_2$ qui va faire le terme $\left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2$, donc $\underline{Y}_2$ doit être complexe.

On arrive à :

- $\underline{Y}_1$, $\underline{Y}_3$ et $\underline{Y}_4$ sont des résistances de valeur respective : R_1 , R_3 et R_2 .
- $\underline{Y}_2$ et $\underline{Y}_5$ sont des condensateurs de valeur respective : C_2 et C_1 .

On obtient comme fonction de transfert :

$$\underline{T} = -\frac{1}{R_1.R_3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_2.R_3} + jC_1\omega\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + jC_2\omega\right)}$$

Dans le cas particulier où toutes les résistances sont égales à R , alors

$$\underline{T} = -\frac{1}{1 + j\omega 3RC_1 + (j\omega R\sqrt{C_1C_2})^2}$$

par identification on obtient :

$$\begin{cases} A = -1 \\ \omega_c = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}} \\ m = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \end{cases}$$

4.3.3.5.2. Structure passe-haut de Rauch

On désire obtenir une fonction de transfert de la forme :

$$\underline{T} = A \frac{\left(j \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}{1 + 2jm \frac{\omega}{\omega_c} + \left(j \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

Par le même raisonnement que précédemment :

- c'est le terme $\underline{Y_1 Y_3}$ qui donne le terme $\left(j \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2$, donc $\underline{Y_1}$ et $\underline{Y_3}$ sont complexes
- c'est le terme $\underline{Y_3 Y_4}$ qui donne le terme $\left(j \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2$, donc $\underline{Y_3}$ et $\underline{Y_4}$ sont complexes
- il ne reste que $\underline{Y_2}$ et $\underline{Y_5}$ pour donner le terme réel, donc $\underline{Y_2}$ et $\underline{Y_5}$ sont réelles.

On arrive à :

- $\underline{Y_1}$, $\underline{Y_3}$ et $\underline{Y_4}$ sont des condensateurs de valeur respective : C_1 , C_3 et C_2 .
- $\underline{Y_2}$ et $\underline{Y_5}$ sont des résistances de valeur respective : R_2 et R_1 .

On obtient comme fonction de transfert :

$$\underline{T} = - \frac{C_1 C_3 (j\omega)^2}{\frac{1}{R_1} \left[\frac{1}{R_2} + j\omega(C_1 + C_2 + C_3) \right] + C_2 C_3 (j\omega)^2}$$

Dans le cas particulier où toutes les capacités sont égales à C , alors

$$\underline{T} = - \frac{(j\omega C \sqrt{R_1 R_2})^2}{1 + j\omega 3CR_2 + (j\omega C \sqrt{R_1 R_2})^2}$$

par identification on obtient :

$$\begin{cases} A = -1 \\ \omega_c = \frac{1}{C \sqrt{R_1 R_2}} \\ m = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \end{cases}$$

4.3.3.5.3. Structure passe-bande de Rauch

On désire obtenir une fonction de transfert de la forme :

$$\underline{T} = A \frac{2jm \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + 2jm \frac{\omega}{\omega_c} + \left(j \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2}$$

Par le même raisonnement que précédemment :

- c'est le terme $\underline{Y}_1 \underline{Y}_3$ qui donne le terme $2jm \frac{\omega}{\omega_c}$, donc $\underline{Y}_1$ ou $\underline{Y}_3$ est complexe.

Si on prend $\underline{Y}_3$ complexe et $\underline{Y}_1$ réel, on arrive à :

$\underline{Y}_5$ forcément réel car il faut un terme réel au dénominateur, c'est donc $\underline{Y}_3 \underline{Y}_4$ qui donne le terme $\left(j \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2$, donc $\underline{Y}_4$ est complexe. On peut prendre $\underline{Y}_2$ ou $\underline{Y}_1$ pour faire le terme $\underline{Y}_2 \underline{Y}_5$ ou $\underline{Y}_1 \underline{Y}_5$ réel, donc par exemple on prend $\underline{Y}_1$ réel (déjà pris précédemment) et $\underline{Y}_2$ au choix.

On arrive à :

- $\underline{Y}_1$, $\underline{Y}_2$ et $\underline{Y}_5$ sont des résistances de valeur respective : R_1 , R_2 et R_3 .

- $\underline{Y}_3$ et $\underline{Y}_4$ sont des condensateurs de valeur respective : C_2 et C_1 .

On obtient comme fonction de transfert :

$$\underline{T} = - \frac{jC_2 \omega}{R_1} \frac{1}{\frac{1}{R_3} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\omega(C_1 + C_2) \right] + C_1 C_2 (j\omega)^2}$$

Dans le cas particulier où toutes les capacités sont égales à C, alors

$$\underline{T} = - \frac{R_3}{2R_1} \frac{2j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C}{1 + 2j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C + (jC\omega)^2 R_3 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

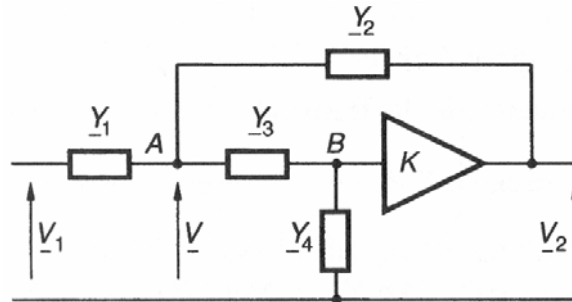
par identification on obtient :

$$\begin{cases} A = -\frac{R_3}{2R_1} \\ \omega_c = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3}} \\ m = \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_3 (R_1 + R_2)}} \end{cases}$$

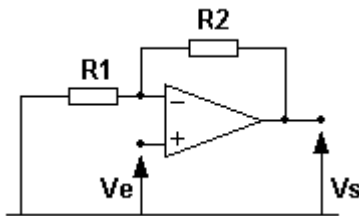
4.3.3.6. Structure de Sallen-key

La structure de Sallen-key permet de réaliser tout les types de filtres (passe bas, passe haut, passe bande) hormis les filtres réjecteur de bande (coupe bande).

Cette famille de filtres est décrite par le schéma de la figure suivante sur lequel $\underline{Y}_1$, $\underline{Y}_2$, $\underline{Y}_3$ et $\underline{Y}_4$ sont des admittances.



L'amplificateur de tension K possède des caractéristiques idéales : impédances d'entrée infinie, impédance de sortie nulle. Il peut être réalisé à l'aide d'un AOP monté en amplificateur non-inverseur.



$$K = \frac{V_s}{V_e} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

La formule de Millman, appliquée aux points A et B, conduit aux équations

$$\begin{cases} \underline{V}_A = \frac{\underline{Y}_1 \underline{V}_1 + \underline{Y}_2 \underline{V}_2 + \underline{Y}_3 \underline{V}_B}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \\ \underline{V}_B = \frac{\underline{Y}_3 \underline{V}_A}{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4} \Rightarrow \underline{V}_A = \underline{V}_B \frac{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4}{\underline{Y}_3} \end{cases}$$

Par élimination de $\underline{V}_A$ et en écrivant que $\underline{V}_2 = K \cdot \underline{V}_B$ il vient :

$$\underline{T} = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{KY_1 Y_3}{(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)(\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) + \underline{Y}_3(\underline{Y}_4 - KY_2)}$$

Les admittances $\underline{Y}_1$, $\underline{Y}_2$, $\underline{Y}_3$ et $\underline{Y}_4$ sont réalisées par des résistances $\left(\underline{Y} = \frac{1}{R}\right)$ ou par des condensateurs ($\underline{Y} = jC\omega$).

4.3.3.6.1. Structure passe-bas de Sallen-key

On désire obtenir une fonction de transfert de la forme:

$$\underline{T} = \frac{A}{1 + 2jm \frac{\omega}{\omega_c} + \left(j \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2}$$

Le numérateur doit être réel, on va donc prendre $\underline{Y}_1$ et $\underline{Y}_3$ réel.

Au dénominateur, il ne reste que le terme $\underline{Y}_2 \underline{Y}_4$ qui permette d'obtenir le terme en $\left(j \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2$, tous les autres termes étant facteur de $\underline{Y}_1$ ou $\underline{Y}_3$.

On arrive à :

- $\underline{Y}_1$ et $\underline{Y}_3$ sont des résistances de valeur respective : R_1 et R_2 .
- $\underline{Y}_2$ et $\underline{Y}_4$ sont des condensateurs de valeur respective : C_2 et C_1 .

On obtient comme fonction de transfert :

$$\underline{T} = \frac{K}{(1 + jR_1C_2\omega)(1 + jR_2C_1\omega) + jR_1\omega(C_1 - KC_2)}$$

Dans le cas particulier où les résistances R_1 et R_2 sont égales à R , alors

$$\underline{T} = \frac{K}{1 + jR\omega[2C_1 + C_2(1 - K)] + (jR\omega\sqrt{C_1C_2})^2}$$

par identification on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = K \\ \omega_c = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}} \\ m = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} + \frac{1-K}{2} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \end{array} \right.$$

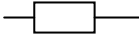
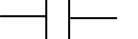
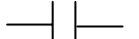
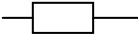
4.3.3.6.2. Structure passe-haut de Sallen-key

On désire obtenir une fonction de transfert de la forme :

$$\underline{T} = A \frac{\left(j \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}{1 + 2jm \frac{\omega}{\omega_c} + \left(j \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

Nous pouvons appliquer la même méthode que celle vue pour le passe-bas, ou bien effectuer une transposition de composants comme pour un simple circuit RC et CR

On effectue les transpositions :

	Passe-bas	Passe-haut
Structure		
		

On arrive à :

- $\underline{Y}_1$ et $\underline{Y}_3$ sont des condensateurs de valeur respective : C_1 et C_2 .
- $\underline{Y}_2$ et $\underline{Y}_4$ sont des résistances de valeur respective : R_2 et R_1 .

On obtient comme fonction de transfert :

$$\underline{T} = \frac{KC_1C_2R_1R_2(j\omega)^2}{(1 + jR_2C_1\omega)(1 + jR_1C_2\omega) + jC_2\omega(R_2 - KR_1)}$$

par identification on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = K \\ \omega_c = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}} \\ m = \frac{1}{2\sqrt{R_1R_2C_1C_2}} [R_2(C_1 + C_2) + R_1C_2(1 - K)] \end{array} \right.$$

4.3.3.6.3. Structure passe-bande de Sallen-key

On désire obtenir une fonction de transfert de la forme :

$$\underline{T} = A \frac{2jm \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + 2jm \frac{\omega}{\omega_c} + \left(j \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2}$$

En prenant $\underline{Y}_1 = 1/R_1$, $\underline{Y}_2 = 1/R_2$, $\underline{Y}_3 = jC\omega$ et $\underline{Y}_4 = jC\omega + 1/R_2$ (résultant de la mise en parallèle d'une résistance et d'un condensateur, on arrive à la forme suivante :

$$\underline{T} = \frac{KR_2}{2R_2 + R_1(3-K)} \cdot \frac{jR_2C\omega \left[2 + (1-K) \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right]}{1 + jR_2C\omega \left[2 + (1-K) \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right] + (jR_2C\omega)^2 \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

par identification on obtient :

$$\begin{cases} A = \frac{KR_2}{2R_2 + R_1(3-K)} \\ \omega_c = \frac{1}{R_2C} \sqrt{1 + \frac{R_2}{R_1}} \\ m = \frac{2R_2 + R_1(3-K)}{2\sqrt{R_1(R_1 + R_2)}} \end{cases}$$

5. MEMO BUTTERWORTH - TCHEBYCHEFF - BESSEL

Filtres de Butterworth	Filtres de Tchebycheff
Avantage : • courbe de réponse très plate à l'origine, - amplitude régulière en bande passante • bon temps de propagation de groupe • calculs faciles Inconvénient : • raideur de la coupure moyenne • l'atténuation en bande passante notée sur les gabarits normalisés 'a' est toujours égale à -3 dB (a = -3 dB). Fonction de Butterworth : $T(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^{2n}}}$ ou n est l'ordre du filtre. Détermination de l'ordre du filtre $n \geq \frac{\ln\left(10^{\frac{b}{10}} - 1\right)}{2 \cdot \ln(X_1)}$	Avantage : • de tous les polynomiaux, ce sont ceux qui présentent le front de coupure la plus raide pour un ordre de filtre donné. Inconvénient : • ondulation en bande passante • temps de propagation de groupe non constant en bande passante. Fonction de Tchebycheff : $T(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_n^2(x)}}$ avec $C_0(x) = 1$; $C_1(x) = x$; et $C_{n+1}(x) = 2.x.C_n(x) - C_{n-1}(x)$ Détermination de l'ordre du filtre : $n \geq \frac{\arg ch \left(\sqrt{\frac{10^{\frac{b}{10}} - 1}{10^{\frac{a}{10}} - 1}} \right)}{\arg ch(X_1)}$

Deux méthodes sont possibles pour déterminer la fonction de transfert de notre filtre : soit à partir des formules données dans le tableau précédent, soit à partir d'abaque et de tableaux.

La fonction de transfert doit être déterminée en fonction du type de réponse choisie. Vous trouverez ci après les fonctions de transmission (inverse des fonctions de transfert) des filtres de Butterworth, de Tchebycheff et de Bessel.

Fonctions de transmission $\underline{H}(s) = \underline{V}_1/\underline{V}_2$ des filtres de Butterworth d'ordre 1 à 9 :

$$\begin{aligned} P_1 &= s + 1 \\ P_2 &= s^2 + \sqrt{2} s + 1 \\ P_3 &= s^3 + 2 s^2 + 2 s + 1 \\ P_4 &= s^4 + 2,613 s^3 + 3,414 s^2 + 2,613 s + 1 \\ P_5 &= s^5 + 3,236 s^4 + 5,236 s^3 + 5,236 s^2 + 3,236 s + 1 \\ P_6 &= s^6 + 3,863 s^5 + 7,464 s^4 + 9,141 s^3 + 7,464 s^2 + 3,863 s + 1 \\ P_7 &= s^7 + 4,494 s^6 + 10,098 s^5 + 14,592 s^4 + 14,592 s^3 + 10,098 s^2 + 4,494 s + 1 \\ P_8 &= s^8 + 5,152 s^7 + 13,137 s^6 + 21,846 s^5 + 25,688 s^4 + 21,846 s^3 + 13,137 s^2 + 5,152 s + 1 \\ P_9 &= s^9 + 5,759 s^8 + 16,582 s^7 + 31,163 s^6 + 41,986 s^5 + 41,986 s^4 + 31,163 s^3 + 16,582 s^2 + 5,759 s + 1 \end{aligned}$$

Fonctions de transmission $\underline{H}(s) = \underline{V}_1/\underline{V}_2$ des filtres de Bessel d'ordre 1 à 8 :

$$\begin{aligned} P_1 &= s + 1 \\ P_2 &= s^2 + 3 s + 3 \\ P_3 &= s^3 + 6 s^2 + 15 s + 15 \\ P_4 &= s^4 + 10 s^3 + 45 s^2 + 105 s + 105 \\ P_5 &= s^5 + 15 s^4 + 105 s^3 + 420 s^2 + 945 s + 945 \\ P_6 &= s^6 + 21 s^5 + 210 s^4 + 1 260 s^3 + 4 725 s^2 + 10 395 s + 10 395 \\ P_7 &= s^7 + 28 s^6 + 378 s^5 + 3 150 s^4 + 17 325 s^3 + 62 370 s^2 + 135 135 s + 135 135 \\ P_8 &= s^8 + 36 s^7 + 630 s^6 + 6 930 s^5 + 51 975 s^4 + 270 270 s^3 + 945 945 s^2 + 2 027 025 s + 2 027 025 \\ P_9 &= s^9 + 45 s^8 + 990 s^7 + 13 860 s^6 + 135 135 s^5 + 945 945 s^4 + 4 729 726 s^3 + 16 216 202 s^2 + 34 459 432 s + 34 459 432 \\ P_n &= (2n-1) P_{n-1} + s^2 P_{n-2} \end{aligned}$$

Fonctions de transmission $\underline{H}(s) = \underline{V}_1/\underline{V}_2$ des filtres de Tchebycheff d'ordre 2 à 7 :

$$\begin{aligned} A_{\max} &= 0,1dB \quad \varepsilon = 0,152 62 \\ P_2 &= 0,301 7 s^2 + 0,715 8 s + 1 \\ P_3 &= 0,610 5 s^3 + 1,183 6 s^2 + 1,605 2 s + 1 \\ P_4 &= 1,206 9 s^4 + 2,177 1 s^3 + 3,170 5 s^2 + 2,444 7 s + 1 \\ P_5 &= 2,441 9 s^5 + 4,258 6 s^4 + 6,765 8 s^3 + 5,853 1 s^2 + 3,505 5 s + 1 \\ P_6 &= 4,827 9 s^6 + 8,266 2 s^5 + 14,32 s^4 + 13,42 s^3 + 9,886 8 s^2 + 4,353 6 s + 1 \\ P_7 &= 9,767 7 s^7 + 16,538 s^6 + 31,095 s^5 + 30,956 s^4 + 26,423 s^3 + 14,484 s^2 + 5,487 s + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\max} &= 0,5dB \quad \varepsilon = 0,349 31 \\ P_2 &= 0,659 5 s^2 + 0,940 2 s + 1 \\ P_3 &= 1,397 5 s^3 + 1,750 6 s^2 + 2,144 6 s + 1 \\ P_4 &= 2,638 1 s^4 + 3,158 9 s^3 + 4,529 3 s^2 + 2,705 3 s + 1 \\ P_5 &= 5,589 s^5 + 6,553 s^4 + 10,38 s^3 + 7,319 s^2 + 4,205 8 s + 1 \\ P_6 &= 10,552 s^6 + 12,232 s^5 + 22,918 s^4 + 16,776 s^3 + 12,366 s^2 + 4,563 s + 1 \\ P_7 &= 22,355 s^7 + 25,736 s^6 + 53,937 s^5 + 41,792 s^4 + 36,84 s^3 + 16,89 s^2 + 6,306 s + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\max} &= 1dB \quad \varepsilon = 0,508 84 \\ P_2 &= 0,907 s^2 + 0,995 7 s + 1 \\ P_3 &= 2,035 3 s^3 + 2,011 6 s^2 + 2,520 6 s + 1 \\ P_4 &= 3,628 s^4 + 3,456 8 s^3 + 5,274 9 s^2 + 2,694 2 s + 1 \\ P_5 &= 8,1415 s^5 + 7,627 1 s^4 + 13,75 s^3 + 7,933 s^2 + 4,726 4 s + 1 \\ P_6 &= 14,512 s^6 + 13,47 s^5 + 28,02 s^4 + 17,445 s^3 + 13,632 s^2 + 4,456 s + 1 \\ P_7 &= 32,566 s^7 + 30,06 s^6 + 70,866 s^5 + 46,53 s^4 + 44,21 s^3 + 17,866 s^2 + 6,958 4 s + 1 \end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

Jean-Luc AZAN. *Précis d'électronique Tome 1*, édition Bréal. ISBN 2 84291 531 3.

Thierry GERVAIS. *Électronique première année*, édition Vuibert. ISBN 2 7117 70931.

François MANNEVILLE et Jacques ESQUIEU. *Électronique. Systèmes bouclés linéaires, de communication et de filtrage 2^{ème} édition*, édition DUNOD. ISBN 2 10 005382 5

Laurent DEHAIS. *Polycopié de filtrage analogique*. Classe Préparatoire aux grandes écoles TSI au lycée Raspail de Paris.

Gilles REY. *Cours sur le filtrage analogique*. Préparation à l'agrégation au lycée Louis Armand de Nogent sur Marne.

Thierry DUMARTIN. *Filtrage*. Fichier word « le_filtrage.doc » disponible sur internet.

Xavier GALTIER. *Synthèse de filtre*. Fichier pdf « Synthese_de_filtre.pdf » disponible sur internet.

Paul BILDSTEIN. *Fonctions de transfert des filtres électroniques*, édition Techniques de l'ingénieur E3 110.

Paul BILDSTEIN. *Synthèse et réalisation des filtres actifs*, édition Techniques de l'ingénieur E3 130.